

**ОСНОВЫ
ТЕПЛООБМЕНА
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
МАШИНАХ**

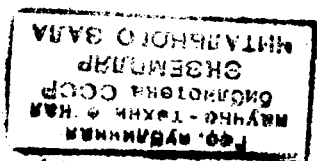
И. Ф. ФИЛИППОВ

**ОСНОВЫ
ТЕПЛООБМЕНА
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
МАШИНАХ**



«ЭНЕРГИЯ»
Ленинградское отделение
1974

ДН
24736



74-14249

В книге изложены теоретические и инженерные основы теплообмена в электрических машинах, рассмотрены практические методы теплового и аэродинамического расчета машин, методы проектирования и анализа систем охлаждения.

Книга предназначена для специалистов электромашиностроения, занятых проблемами теплообмена, для студентов и аспирантов, изучающих электрические машины.

Ф $\frac{30307-130}{051(01)-74}$ 158-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ДВИЖЕНИЕ ОХЛАЖДАЮЩИХ СРЕД В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

<i>Глава первая. Предварительные соображения</i>	9
1-1. Системы охлаждения электрических машин	—
1-2. Эффективность систем охлаждения	10
1-3. Экономичность систем охлаждения	11
1-4. Расчет и проектирование систем охлаждения	—
1-5. Связь теплового и вентиляционного расчетов	12
1-6. Точность вентиляционного и теплового расчетов и роль эксперимента	—
1-7. Объем знаний, необходимый для расчета и проектирования систем охлаждения	13
1-8. Единицы измерения тепловых и гидродинамических величин	14
<i>Глава вторая. Охлаждающие среды</i>	15
2-1. Жидкости и газы	—
2-2. Вязкость	16
2-3. Газовые законы для идеального газа	17
2-4. Уравнение состояния для реальных газов	19
2-5. Кривые фазового перехода	21
2-6. Пример расчета	24
<i>Глава третья. Кинематика идеальной жидкости</i>	25
3-1. Описание движения жидкости	—
3-2. Сплошные среды	27
3-3. Эйлерово представление движения жидкости	29
3-4. Линии и трубки тока в поле скоростей жидкости	—
3-5. Анализ поля скоростей жидкости	30
3-6. Составляющие поля скоростей	34
3-7. Геометрия векторного поля скорости	38
<i>Глава четвертая. Уравнение движения жидкости и его интеграл</i>	41
4-1. Понятие давления в жидкости	—
4-2. Связь между распределением давления и силой тяжести	43
4-3. Сила инерции в движущейся жидкости	44
4-4. Сила трения в движущейся жидкости	46
4-5. Классификация сил, приложенных к элементу объема движущейся жидкости	—
4-6. Уравнение движения несжимаемой жидкости	48
4-7. Интеграл уравнения Эйлера вдоль линии тока. Уравнение Бернулли	50
<i>Глава пятая. Элементы теории сопротивления жидкостей</i>	54
5-1. Вводные замечания	—
5-2. Гидромеханическое подобие течений	55
5-3. Гипотеза Ньютона о сопротивлении жидкости	60
5-4. Природа сопротивления жидкостей	61
5-5. Обобщение уравнения Бернулли на случай движения жидкости с трением	65
5-6. Физический смысл уравнения Бернулли	66
5-7. Пример применения уравнения Бернулли	69

5-8. Измерение давлений	72
5-9. Термодинамический анализ движения жидкости или газа при отсутствии теплообмена	78
5-10. Режимы движения жидкостей	81
5-11. Сопротивление жидкости при ламинарном режиме движения	82
5-12. Сопротивление жидкости при турбулентном движении	85
5-13. Распределение скоростей при турбулентном движении. Погра- ничный слой	87
5-14. Теорема количества движения. Потери давления при внезап- ном расширении канала	89
5-15. Потери давления при сужении канала, движении через от- верстия и решетки, движении при плавном изменении сече- ния и поворотах. Сопротивление ответвления	92
5-16. Аэродинамические и гидродинамические сопротивления элект- рической машины	96
Глава шестая. Вентиляционный расчет электрических машин	100
6-1. Схемы вентиляции электрических машин	—
6-2. Задачи вентиляционного расчета электрической машины	104
6-3. Графическое решение уравнения равновесия	106
6-4. Проектирование центробежных нагнетателей	107
6-5. Проектирование осевых вентиляторов	118
6-6. Пример расчета вентиляторов	122
6-7. Расчет аэродинамического сопротивления схемы вентиляции методом уравнивания потерь напора	124
6-8. Расчет схем, содержащих различные напорные элементы	125
6-9. Приближенное графо-аналитическое решение мостовых схем	127
6-10. Графическое решение схем вентиляции	131
6-11. Применение цифровых вычислительных машин для вентиля- ционного расчета	134
6-12. Применение аналоговых вычислительных машин для венти- ляционного расчета	139
6-13. Сопоставление методов вентиляционного расчета	141
6-14. Пример вентиляционного расчета турбогенератора мощностью 200 Мвт	142
Глава седьмая. Вентиляционный расчет систем одноступенчатых ответвлений	144
7-1. Вводные замечания	—
7-2. Виды сопротивлений в системах с ответвлениями	145
7-3. Рекуррентные формулы для расчета расходов	147
7-4. Дифференциальное уравнение распределения	149
7-5. Упрощенное решение дифференциального уравнения	150
7-6. Учет сопротивления питающих каналов	158
7-7. Анализ систем распределения	162
7-8. Пример расчета распределения скоростей	164
Глава восьмая. Вентиляционный расчет систем вращающихся каналов	166
8-1. Вводные замечания	—
8-2. Вращающийся канал — типичный элемент конструкции элект- рической машины	167
8-3. Абсолютное и относительное движение	168
8-4. Абсолютное движение идеальной жидкости есть движение безвихревое	169
8-5. Относительное движение идеальной жидкости — движение вих- ревое	173
8-6. Уравнение энергии для относительного движения	175
8-7. Анализ экспериментальных данных	178
8-8. Общее векторное дифференциальное уравнение вторичного вихря	186

8-9. Физические причины увеличения сопротивления	189
8-10. Формулы сопротивления для вентиляционного и гидравлического расчетов электрических машин	192
Глава девятая. Гидравлический расчет электрических машин	—
9-1. Вводные замечания	—
9-2. Гидравлический расчет обмоток статора с жидкостным охлаждением	193
9-3. Нарушение сплошности течения (кавитация)	195
9-4. Распределение давления и температуры во вращающихся каналах обмоток роторов и условия возникновения кавитации	197
9-5. Некоторые последствия устойчивой кавитации в каналах обмоток электрических машин	202
Глава десятая. Затраты энергии на охлаждение электрических машин	208
10-1. Классификация потерь в системах охлаждения	—
10-2. Циркуляционные потери	209
10-3. Потери трения	211

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДВИЖЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Глава одиннадцатая. Уравнение теплопроводности	213
11-1. Поле температуры, его аналитическое и графическое представление. Градиент температуры	—
11-2. Основной закон теплопроводности	215
11-3. Уравнение теплопроводности	218
11-4. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности	219
11-5. Классификация краевых задач уравнения теплопроводности	222
11-6. Упрощение (редукция) общей задачи теплопроводности	224
11-7. Основы теории подобия	226
11-8. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл	231
11-9. Стержень, ограниченный с одной стороны	238
11-10. Теплопроводность в конечном стержне	239
Глава двенадцатая. Решение неоднородных задач уравнения теплопроводности	246
12-1. Вводные замечания	—
12-2. Линейная теплопроводность при несимметричных и симметричных граничных условиях (стационарная неоднородность)	248
12-3. Применение преобразования Лапласа	251
12-4. Линейная теплопроводность для случая, когда интенсивность источников тепла зависит от времени (нестационарная неоднородность)	258
12-5. Применение метода Г. А. Гринберга	264
12-6. Двумерное стационарное распределение температуры	266
12-7. Тело цилиндрической формы	271
12-8. Двумерная нестационарная теплопроводность	274
Глава тринадцатая. Тепловой расчет электрических машин в стационарном и нестационарном режимах нагрузки	276
13-1. Вводные замечания	—
13-2. Температура и превышение температуры в элементах конструкции электрической машины	277
13-3. Обзор методов теплового расчета	280

13-4. Эквивалентные тепловые схемы	282
13-5. Пример расчета эквивалентной тепловой схемы статора турбогенератора с водяным охлаждением обмотки	284
13-6. Замена дифференциальных уравнений с частными производными обыкновенными дифференциальными уравнениями	288
13-7. Синтез эквивалентной тепловой схемы машины и дифференциального уравнения теплопроводности исследуемого элемента машины	291
13-8. Применение вычислительных машин	—
13-9. Тепловой расчет нестационарных процессов. Классическая теория нестационарного теплообмена	293
13-10. Расчет теплообменников электрических машин	297
Глава четырнадцатая. Непосредственное охлаждение электрических машин	308
14-1. Предварительные соображения	—
14-2. Тепловой расчет проводника с током	311
14-3. Метод относительных единиц в тепловом расчете электрических машин с непосредственным охлаждением	319
14-4. Выбор длины охлаждающих каналов	327
14-5. Выбор сечения каналов	332
14-6. Нестационарный теплообмен при непосредственном охлаждении	339
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ	
СИСТЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН РАЗНЫХ ТИПОВ	
Глава пятнадцатая. Турбогенераторы	349
15-1. Системы охлаждения турбогенераторов	—
15-2. Охлаждение статора	351
15-3. Охлаждение ротора	356
15-4. Проблемы криогенного охлаждения турбогенераторов	357
Глава шестнадцатая. Гидрогенераторы	360
16-1. Вводные замечания	—
16-2. Анализ направленности потоков охлаждающего воздуха в зоне полюсных окон ротора	—
16-3. Экспериментальное определение аэродинамического сопротивления вращающихся вентиляционных каналов обода ротора	361
16-4. Помпаж в схемах вентиляции гидрогенераторов	363
Глава семнадцатая. Машины постоянного тока	365
17-1. Особенности вентиляционного расчета	—
17-2. Тепловой расчет якоря и магнитной системы	367
Глава восемнадцатая. Машины переменного тока	370
18-1. Схемы вентиляции	—
18-2. Тепловой расчет машин переменного тока	372
18-3. Сопоставление различных схем	373
Приложение 1	374
Приложение 2	379
Приложение 3	380
Список литературы	381

*Светлой памяти
Главного конструктора
завода «Электросила»
Николая Павловича
Иванова
посвящаю*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге изложены теоретические и инженерные основы теплообмена в электрических машинах. Это означает, что на достаточно строгих основаниях рассмотрены практические методы теплового и аэродинамического расчета машин, методы проектирования и анализа систем охлаждения.

К настоящему времени по проблемам теплопередачи в электротехнических устройствах создана значительная литература. Из книг последних лет основное значение имеют: «Нагревание и охлаждение электрических машин» Г. Готтера, «Непосредственное охлаждение электрических машин «А. И. Москвитина, «Тепловой расчет электрических аппаратов» А. М. Залесского и Г. А. Кукекова, «Охлаждение гидрогенераторов» Т. И. Альпер и Т. Г. Сергиевской. Важный материал содержится в книгах по проектированию, расчету и исследованиям электрических машин различных типов. Результаты новейших исследований содержатся в многочисленных публикациях в периодической печати. Настоящая книга создана в качестве учебного пособия.

Выбор материала настоящей книги, его расположение и некоторые методические особенности изложения продиктованы стремлением в доступной и сжатой форме описать круг довольно многообразных проблем нагревания и охлаждения крупных электрических машин. Этим может быть достигнута одна из целей книги — содействовать созданию единой теоретической и методической платформы, необходимой при исследованиях теплообмена в машинах.

В книге использован опыт отечественного электромашиностроения, а также опыт преподавания курса теплопередачи на кафедре электрических машин в ЛПИ им. М. И. Калинина и опыт подготовки специалистов по теплообмену в Ленин-

градском объединении «Электросила». Книга предназначена для специалистов электромашиностроения, занятых проблемами теплообмена, а также для студентов и аспирантов, изучающих электрические машины.

Приношу искреннюю благодарность канд. техн. наук Э. И. Гуревичу, любезно предложившему помощь и материал при разработке вопросов нестационарного теплообмена в обмотках с непосредственным охлаждением, а также Л. И. Дегтевой и Ю. Л. Рыбину, которые получили решения ряда неоднородных краевых задач уравнения теплопроводности, и всем другим товарищам, оказавшим помощь при подготовке рукописи к изданию.

Эта, насколько известно, первая попытка синтезировать излагаемый материал, естественно, не может быть совершенной. Просьба направлять замечания по адресу: 192041, Ленинград, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение издательства «Энергия».

Автор

ДВИЖЕНИЕ ОХЛАЖДАЮЩИХ СРЕД В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Глава первая

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

1-1. Системы охлаждения электрических машин

При работе электрической машины во всем ее объеме выделяется тепло, представляющее собой потери энергии, которые возникают при взаимном превращении механической и электрической энергии. Такими потерями в общем случае являются джоулевы потери в проводниках, потери на перемагничивание и на вихревые токи в магнитных и проводящих массах, потери трения роторов и потери на циркуляцию охлаждающих сред.

Конструкция всякой электрической машины представляет собой композицию так называемых активных элементов (активная сталь, медь обмоток) и конструктивных элементов — изоляционных и проводящих. В общем случае такая система является неоднородной или, как говорят, анизотропной. Основные свойства системы, такие, как теплоемкость, плотность, меняются в зависимости от направления внутри одного элемента и при переходе от одной детали конструкции к другой.

Тепловые потоки, начинаясь внутри твердых тел, составляющих конструкцию электрической машины, частично увеличивают их теплосодержание (в неустановившихся процессах), частично путем теплопроводности в телах и теплообмена на их границах поступают в охлаждающие среды.

Охлаждающая среда (газ или жидкость) под воздействием нагнетательных элементов (вентиляторов или насосов) циркулирует по каналам тракта охлаждения, образуя совместно с каналами и нагнетателями систему охлаждения электрической машины.

Разнообразные системы охлаждения электрических машин определяют интенсивность теплообмена на граничных поверхностях и в конечном итоге реализуемую в данном объеме машины электромагнитную мощность. Чем интенсивнее теплообмен, тем меньшая температура может быть достигнута при наличии определенного количества потерь энергии. В свою очередь, обеспечение приемлемой с точки зрения применяемых материалов тем-

пературы гарантирует долговечность машины и надежность ее работы при номинальной нагрузке. Таким образом, важнейшей характеристикой каждой системы охлаждения является ее эффективность.

Поскольку эффективность охлаждения, как вполне очевидно, зависит от количества энергии, затрачиваемой на циркуляцию охлаждающих сред, система охлаждения характеризуется также ее экономичностью.

1-2. Эффективность систем охлаждения

При проектировании электрических машин естественно стремятся применять достаточно эффективные системы охлаждения. Критериями эффективности могут, вообще говоря, служить различные величины или некоторые комплексы величин. Можно было бы, например, принять в качестве критерия допустимую величину теплового потока, приходящегося на единицу поверхности охлаждения. Другой подход приводит к понятию максимально допустимого габарита, например длины канала, реализуемого при применении избранной системы охлаждения. Важнейшим показателем является отношение максимальной температуры в наиболее нагретой точке к средней температуре всей машины или максимальной температуры обмотки к ее средней температуре.

Следует подчеркнуть, что каждый из перечисленных параметров в действительности так или иначе характеризует эффективность системы и должен рассматриваться при конкретном исследовании. Однако в практике необходим более общий критерий, который позволил бы группировать все системы охлаждения электрических машин по определенным уровням эффективности или определенным классам.

Таким критерием может служить (наряду с общепринятым применением) так называемая машинная постоянная, например постоянная Эссона, которая определяет мощность электрической машины в заданном объеме.

$$C_3 = \frac{S}{lD^2n} 10^6, \text{ кв} \cdot \text{а} \cdot \text{мин}/(\text{м}^3 \cdot \text{об}), \quad (1-1)$$

где S — кажущаяся мощность, кв·а; l — длина активной стали статора, см; D — диаметр ротора статора, см; n — скорость вращения, об/мин.

Постоянная (1-1) в наиболее общем виде определяет степень соответствия примененной системы охлаждения ее целевому назначению. Она носит название коэффициента использования. Как мы увидим в дальнейшем, каждой системе охлаждения свойствен вполне определенный диапазон значений коэффициента использования. Что касается сопоставления различных систем по более частным признакам, характе-

ризующим системы глубже, то такое сопоставление всегда является предметом специального исследования, проводимого с учетом многих индивидуальных особенностей электрических машин того или иного типа.

1-3. Экономичность систем охлаждения

Когда говорят об экономичности, имеют в виду величину капитальных затрат, относимых к определенному сроку окупаемости оборудования, и величину эксплуатационных затрат.

При оценке экономичности систем охлаждения электрических машин величину капитальных затрат в подавляющем большинстве случаев можно не принимать во внимание. Только применение уникальных устройств или средств охлаждения может потребовать сопоставления по капитальным затратам.

В то же время величина эксплуатационных затрат является важнейшей характеристикой системы охлаждения. Известны многочисленные случаи, когда весьма эффективные системы охлаждения не могли быть внедрены в производство, поскольку потери энергии на циркуляцию охлаждающих средств достигали уровня, недопустимо уменьшающего коэффициент полезного действия электрической машины в целом.

Эксплуатационные затраты принято оценивать величиной удельных затрат мощности на охлаждение, представляющей отношение затраченной на охлаждение мощности p_3 к суммарным потерям электрической машины p_{Σ}

$$\rho = p_3/p_{\Sigma}. \quad (1-2)$$

Численные значения удельных затрат мощности и коэффициентов использования приведены в третьей части при описании систем охлаждения электрических машин некоторых типов и в [64].

1-4. Расчет и проектирование систем охлаждения

Поскольку величина коэффициента использования характеризует одновременно класс конструкции электрической машины и класс системы охлаждения, в большинстве практических случаев расчет и проектирование системы проводятся для заранее избранного типа. Так, например, можно считать известным, что прокатные двигатели постоянного тока двухъякорного исполнения требуют применения принудительной вентиляции.

Таким образом, в процессе проектирования системы охлаждения должны быть определены схемы циркуляции охлаждающих сред и типы нагнетательных элементов на основе требований, предъявляемых классом изоляционных материалов к уровню температуры, возникающей в активной зоне машин при номинальных условиях эксплуатации в установившихся и переходных режимах. Другими словами должны быть выпол-

нены: вентиляционный и гидравлический расчет электрической машины и тепловой расчет, который призван либо продемонстрировать целесообразность избранной системы охлаждения, либо определить дополнительные требования по интенсификации процесса теплообмена.

Строго говоря, при проектировании системы охлаждения необходимо определить поле температуры во всем объеме электрической машины и сопоставить полученное поле с имеющимися техническими требованиями.

Объем и содержание выполняемых при этом расчетов и исследований в сущности и составляют предмет настоящей книги.

1-5. Связь теплового и вентиляционного расчетов

Известно, что уравнение теплопроводности имеет единственное решение лишь в том случае, когда определены условия теплообмена с охлаждающей средой на границах твердых тел. Это означает, что по меньшей мере должна быть известна скорость движения охлаждающей среды в каждой точке ее соприкосновения с поверхностью охлаждения. Таким образом, результаты вентиляционного и гидравлического расчетов определяют граничные условия для уравнения теплопроводности, т. е. служат теми исходными данными, которые позволяют выполнить тепловой расчет машины.

В итоге теплового расчета может оказаться — и это вполне нормальная ситуация, — что охлаждающие среды распределены в системе охлаждения неудовлетворительно либо нерационально. В этом случае система охлаждения должна быть скорректирована. Последующий тепловой расчет показывает результаты проделанной корректировки. Отсюда видна неразрывная связь теплового и вентиляционного расчетов и взаимное влияние их результатов. В настоящее время наметилась тенденция создавать синтетические методики расчета, которые на основе применения вычислительной техники предусматривают цикл поворочных тепловых и вентиляционных расчетов с обратными связями по входным данным. Конечная цель таких методик — соответствие параметров системы охлаждения и технических требований на проектирование электрической машины.

1-6. Точность вентиляционного и теплового расчетов и роль эксперимента

Как будет видно из дальнейшего, методы выполнения вентиляционного и теплового расчетов разнообразны и соответствуют своему назначению в каждом конкретном случае исследования электрической машины.

Возможности обоих видов расчета с точки зрения точности результата достаточно велики. Сегодня можно с уверенностью

констатировать, что и вентиляционный и тепловой расчеты могут быть выполнены сколь угодно точно, если точно заданы входные величины. Последнее требование, однако, не всегда соблюдается. Исходными данными теплового расчета являются, например, свойства применяемых материалов, задаваемые лишь с известной степенью достоверности, а также характер распределения потерь энергии в объеме электрической машины, который, в свою очередь, может быть сформулирован с ограниченной степенью приближения к действительности.

Таким образом, точность результатов расчета ограничена точностью определения входных данных. Отсюда видна роль эксперимента в исследовании созданных электрических машин, с одной стороны, и в усовершенствовании методов расчета, с другой.

Каким бы способом ни выполнялись вентиляционный и тепловой расчеты, критерием точности их результатов могут служить лишь данные экспериментального исследования.

До известной степени объективное сопоставление может быть обеспечено при исследовании в лабораторных условиях макетов и отдельных элементов конструкции электрических машин. При надлежащем соблюдении законов подобия выводы, полученные при таких исследованиях, могут быть распространены на действующее оборудование. Более надежные сведения дает исследование физических моделей и натуральных (обычно головных) образцов машин в реальных условиях эксплуатации.

Техника эксперимента в настоящее время шагнула вперед столь значительно, что позволяет судить о распределении температуры не только в неподвижных элементах машин, но и во вращающихся. По этой причине при определенных усилиях экспериментаторов результаты проведенных испытаний могут быть по существу исчерпывающими. Именно эти результаты и должны в конечном итоге служить критерием точности вентиляционного (гидравлического) и теплового расчетов. По итогам анализа данных опытного исследования должны вноситься необходимые коррективы в практические методики расчета. Чем больше сведений будет предоставлено экспериментаторами в распоряжение проектировщиков, тем более основательными будут соответствующие уточнения.

1-7. Объем знаний, необходимый для расчета и проектирования систем охлаждения

Тепловой расчет электрических машин построен на основе решений уравнения теплопроводности. Поскольку потери энергии выделяются внутри элементов конструкции электрической машины, поле ее температуры является полем с внутренними источниками тепла, и описывающее это поле уравнение теплопроводности есть уравнение неоднородное.

Для получения решений неоднородных задач приходится привлекать аппарат математической физики, весьма глубоко к настоящему моменту разработанный. На основе аналитических решений создаются методы инженерных тепловых расчетов.

Как уже указывалось, для решения уравнения теплопроводности необходимо располагать законом движения охлаждающих сред в системе охлаждения машины. Поскольку типовая система представляет собой сложную совокупность каналов, притом не только неподвижных, но и вращающихся, то для определения скоростей и расходов теплоносителей типовой аппарат инженерной гидравлики во многих случаях оказывается недостаточным и появляется необходимость обращаться к методам теоретической и прикладной гидродинамики. Это означает, что приходится прибегать к анализу решений уравнения движения вязкой жидкости применительно к некоторым упрощенным схемам движения. Результаты такого анализа точно так же, как и в случае теплового расчета, являются базой для создания инженерных методов вентиляционного и гидравлического расчетов.

Большое значение имеет оценка энергетических характеристик процесса охлаждения, или, можно также сказать, термодинамический анализ систем охлаждения. При этом в случае естественного охлаждения электрических машин (т. е. с использованием природной окружающей среды типа воды рек и водоемов) для анализа достаточно иметь в виду лишь первое начало термодинамики. Однако при рассмотрении процессов искусственного (например, глубокого) охлаждения электрических машин приходится обращаться к выводам, следующим из второго начала термодинамики.

Исследование систем охлаждения предполагает, разумеется, глубокое изучение конструкций электрических машин и основных законов электромеханики, определяющих формирование поля потерь энергии в объеме машины.

Таким образом гидродинамическое исследование конструкции дает некоторые исходные данные для теплового исследования. Существует и другая причина, по которой изложение законов движения охлаждающих сред должно предшествовать изложению законов движения тепловых потоков: основные принципы гидродинамики могут быть даны вне зависимости от основных принципов теплопередачи. Как очевидно, обратное утверждение несостоятельно.

1-8. Единицы измерения тепловых и гидродинамических величин

В настоящее время внедряется и является предпочтительной Международная система единиц СИ. Основными единицами системы являются метр, килограмм массы, секунда, градус Кельвина, ампер и свеча.

Соотношения между единицами в системе МКГСС и в системе СИ приведены в табл. 1-1.

Таблица 1-1

Наименование величин	Обозначение в системе единиц МКГСС	Обозначение в системе единиц СИ	Коэффициент пересчета в систему СИ
Масса	$кгс \cdot сек^2 \cdot м^{-1}$	кг	9,81
Плотность	$кгс \cdot сек^2 \cdot м^{-4}$	$кг \cdot м^{-3}$	9,81
Сила	кгс	$n = кг \cdot м \cdot сек^{-2}$	9,81
Давление	$кгс \cdot м^{-2}$	$па = кг \cdot м^{-1} \cdot сек^{-2}$	9,81
Энергия	кгс · м	$дж = кг \cdot м^2 \cdot сек^{-2}$	9,81
Мощность	$кгс \cdot м \cdot сек^{-1}$	вт	9,81
Динамическая вязкость	$кгс \cdot сек \cdot м^{-2}$	па · сек	9,81
Теплота	кал	дж	4,187
Удельная теплоемкость	$кал \cdot град^{-1} \cdot кг^{-1}$	$дж \cdot К^{-1}$	4,187
Удельный тепловой поток	$ккал \cdot ч^{-1} \cdot м^{-2}$	$вт \cdot м^{-2}$	1,163
Теплопроводность	$ккал \cdot ч^{-1} \cdot м^{-1} \cdot град^{-1}$	$вт \cdot м^{-1} \cdot к^{-1}$	1,163

Глава вторая

ОХЛАЖДАЮЩИЕ СРЕДЫ

2-1. Жидкости и газы

В качестве охлаждающих сред в электрических машинах применяются нетвердые тела, т. е. жидкости и газы. Их важнейшим отличием от твердых тел является свойство легкой подвижности или текучести. Это свойство свободной деформации практически выражается в способности жидкостей и газов приобретать форму сосудов, которые они заполняют. Можно сказать еще, что жидкостью или газом называется такое тело, в котором в состоянии покоя всякое сопротивление изменению формы равно нулю.

Все известное разнообразие нетвердых тел подразделяется в механике на три группы:

- 1) жидкие тела с большой вязкостью,
- 2) жидкие тела с малой вязкостью,
- 3) газообразные тела.

В отличие от твердых тел для жидкостей и газов характерно, что усилиям, к ним прилагаемым, пропорциональна не деформация, а скорость деформации рассматриваемой среды. Этот признак может быть принят за одно из определений нетвердых тел, которое основано на опыте. Он означает, что при малой скорости деформации ее величина может быть значительной даже в случае приложения небольших сил. Например, один человек может буксировать в воде тяжело нагруженную лодку при условии, что он будет двигаться достаточно медленно. В противном случае, т. е. при увеличении скорости движения, потребовалось бы большее усилие, чтобы преодолеть возросшее сопротивление воды.

2-2. Вязкость

Вязкость жидкостей и газов проявляется при движении как мера внутреннего трения. К жидким телам с большой вязкостью относятся, например, масло и мед. Малой вязкостью обладают вода и спирт. В этих жидкостях можно перемещать твердые тела при других одинаковых условиях с меньшим усилием. Вязкость газов также различна.

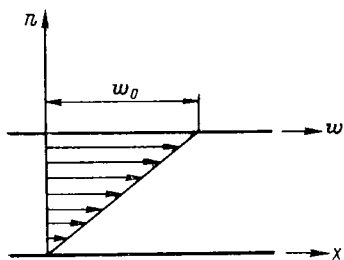


Рис. 2-1. Экспериментально полученная эпюра распределения скоростей вязкой жидкости между двумя пластинами, когда верхняя пластина перемещается относительно нижней со скоростью w_0

Количественно вязкость характеризуется коэффициентом пропорциональности μ в законе изменения касательных напряжений τ в нетвердых телах. Согласно этому закону, касательные напряжения в жидкостях и газах пропорциональны градиенту скорости w относительно перемещения слоев

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n}, \text{ кгс/м}^2. \quad (2-1)$$

Здесь n — направление нормали к плоскости перемещающихся слоев жидкости или газа (рис. 2-1).

Коэффициент μ носит наименование коэффициента вязкости.

Часто употребляют его отношение к плотности среды ρ , которое называется кинематическим коэффициентом вязкости,

$$\nu = \mu/\rho, \text{ м}^2/\text{сек.}$$

Кинематический коэффициент вязкости, получивший свое наименование в связи с тем, что из его размерности исключена масса, характеризует ускорение частиц, вызываемое силами вязкости, но не самые силы.

Касательные напряжения в движущейся среде возникают при перемещении частиц относительно друг друга или относительно ограничивающих поверхностей. Природа вязкости жидкостей и газов различна.

Вязкость жидкостей (их иногда называют капельными жидкостями) есть проявление механических связей между частицами. Поэтому при повышении температуры, когда колебательное движение молекул возрастает и механические связи ослабевают, вязкость уменьшается.

Напротив, вязкость газов при повышении температуры возрастает, поскольку причиной возникновения касательной к слоям силы служит в этом случае диффузия молекул, которая сопровождается переносом ко-

личества движения из одного слоя в другой. С повышением температуры скорость движения молекул возрастает и, следовательно, увеличивается переносимое количество движения.

Согласно кинетической теории газов, касательные напряжения определяются формулой

$$\tau = 0,5\rho l c \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (2-2)$$

где l — средняя длина свободного пробега молекул; c — средняя скорость движения молекул.

Из сопоставления последней формулы с законом касательных напряжений Ньютона (2-1) получаем

$$\mu = 0,5\rho l c. \quad (2-3)$$

Отсюда следует, что коэффициент вязкости практически не зависит от давления, так как, например, при увеличении давления возрастает плотность газа ρ и в равной мере уменьшается длина свободного пробега молекул l . Кроме того, последняя формула подтверждает температурную зависимость вязкости, поскольку с увеличением температуры увеличивается скорость движения c .

В табл. 2-1 приведены численные значения коэффициентов μ и ν при температуре 50°C для наиболее употребляемых теплоносителей.

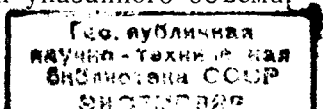
Более подробные данные приведены в приложении 1.

2-3. Газовые законы для идеального газа

Жидкости и газы в равной мере легко изменяют форму занимаемого ими объема, т. е. легко деформируются. Совсем по другому обстоит дело с величиной указанного объема,

Таблица 2-1

Охлаждающая среда	$\nu \cdot 10^3, \text{ м}^2/\text{сек}$	$\mu \cdot 10^6, \text{ кгс}\cdot\text{сек}/\text{м}^2$
Воздух	18,0	1,94
Водород	125,0	0,92
Вода	0,556	56,3
Масло	230	98,000



Газ заполняет все предоставленное ему пространство, изменяя при изменении объема свое давление.

Капельные жидкости отличаются от газов своей практической несжимаемостью, т. е. способностью крайне мало уменьшать объем при значительном увеличении внешнего давления. Например, сжимаемость воды в 14 000 раз меньше, чем сжимаемость воздуха при атмосферном давлении. Для уменьшения объема воды на 0,5% его первоначальной величины необходимо повысить внешнее давление до 100 атм. Причина этого в весьма малых молекулярных расстояниях в жидкости и, следовательно, в весьма больших молекулярных силах сцепления, которые создают давление сжатия внутри жидкости.

Закон, связывающий между собой давление и объем газа, носит название закона Бойля—Мариотта. Согласно этому закону, *давление одного и того же количества газа, при неизменной температуре обратно пропорционально объему, занимаемому этим количеством газа:*

$$pV = p_1V_1, \quad (2-4)$$

где p_1 и V_1 — начальные значения давления и объема; p и V — значения давления и объема при другом состоянии газа.

Объем газа зависит также от его температуры. Гей-Люссак установил, что *повышение температуры на 1°С влечет за собой увеличение объема газа на 1/273,2 того объема, который он занимает при 0°С, при условии, что давление газа при изменении температуры остается неизменным:*

$$V = V_0(1 + \alpha\vartheta), \quad (2-5)$$

где V_0 — объем газа при 0°С; ϑ — температура, в °С; $\alpha = \frac{1}{273,2}$, град⁻¹ — коэффициент расширения.

Следует иметь в виду, что при сжатии газа выделяется тепло, при расширении газ охлаждается. Поэтому закон Бойля—Мариотта справедлив лишь в том случае, когда условия осуществления процесса сжатия или расширения позволяют поддерживать температуру неизменной. Для этого необходимо обеспечить подвод и отвод тепла к изменяющемуся объему газа.

Точно так же и закон Гей-Люссака связан с существенным ограничением, поскольку давление при изменении температуры (и объема), вообще говоря, меняется.

Чтобы снять ограничения при формулировании газовых законов, нужно иметь функциональную зависимость между всеми величинами, определяющими состояние газа: давлением, объемом и температурой. Такая зависимость называется уравнением состояния и для идеальных газов может быть получена теоретически методами кинетической теории газов.

В соответствии с кинетической теорией давление идеального газа есть результат суммарного воздействия ударов молекул,

кинетическая энергия которых эквивалентна температуре. Формула давления имеет вид:

$$p = nKT,$$

где n — среднее число молекул в единице объема; K — постоянная Больцмана, равная $1,37 \cdot 10^{-16}$, эрг/град; T — абсолютная температура газа, °К. При этом $n = N/V$, где N — общее число молекул в газе; V — объем, занимаемый газом.

Число молекул для данного веса газа G может быть вычислено через молекулярный вес μ_0 и универсальное число молекул в одном килограмм-моле газа N_A (число Авогадро):

$$N = \frac{G}{\mu_0} N_A.$$

Отсюда

$$p = \frac{G}{\mu_0} N_A K \frac{T}{V}.$$

Величину KN_A/μ_0 называют газовой постоянной и обозначают R . Таким образом,

$$p = GR \frac{T}{V} \quad (2-6)$$

или

$$pV = GRT.$$

Для 1 кг газа получим

$$pv = RT. \quad (2-7)$$

Величину v называют удельным объемом.

Полученное уравнение связывает все три параметра состояния: давление, температуру и объем, т. е. является уравнением состояния идеальных газов. Оно называется уравнением Клапейрона.

2-4. Уравнение состояния для реальных газов

Реальные газы подчиняются уравнению Клапейрона с достаточной точностью лишь в диапазоне умеренных давлений (до 50 атм) и температур (до $\pm 100^\circ \text{C}$). Вообще следует подчеркнуть, что приведенные выше законы изменения параметров газа верны лишь до некоторых пределов. Так, например, из уравнения Бойля — Мариотта следует, что при увеличении давления какому-либо количеству газа можно придать произвольно малый объем. На самом деле это не так. Существует некоторый предельный объем, определяемый собственным объемом всех молекул газа, до которого может быть сжат газ. В дальнейшем, сколь бы ни увеличивалось давление, объем газа не будет уменьшаться.

Из уравнения Клапейрона следует, что так называемый коэффициент сжимаемости для всех состояний газа равен единице:

$$pv/RT = 1. \quad (2-8)$$

В действительности коэффициент сжимаемости является переменной величиной, зависящей от давления и температуры [15]

$$pv/RT = \varphi(pT). \quad (2-9)$$

Более точным, чем уравнение Клапейрона, для реальных газов является уравнение Ван-дер-Ваальса, в котором учтено влияние внутренних сил притяжения между молекулами на итоговое давление или, как говорят, учтено молекулярное давление:

$$(p + a/v^2)(v - b) = RT. \quad (2-10)$$

Константы a и b этого уравнения зависят от природы вещества. Формулы для их вычисления приведены в § 2-5.

Уравнение Ван-дер-Ваальса указывает на возможность существования двухфазных состояний вещества и фазового перехода от газа к жидкости и обратно. Чтобы убедиться в этом, запишем его как

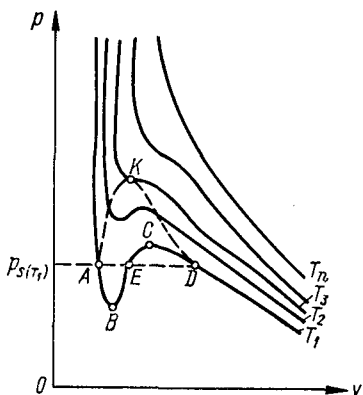


Рис. 2-2. Диаграмма состояния вещества

функцию удельного объема v от других параметров. Получим кубическое уравнение

$$v^3 - (RT/p + b)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0. \quad (2-11)$$

Если в этом уравнении рассматривать давление p в качестве независимой переменной и температуру в качестве параметра, то решение представится в виде семейства кривых $v = f(p)$ с постоянной температурой, т. е. семейства изотерм, которое называют в термодинамике pv -диаграммой, располагая давление по оси ординат (рис. 2-2).

При больших значениях коэффициента $(RT/p + b)$, т. е. при высоких температурах уравнение (2-11) имеет один действительный корень (два других комплексных корня физического смысла не имеют). Это означает, что каждому давлению p на данной изотерме соответствует единственное значение удельного объема v .

При более низкой температуре изотермы приобретают волнообразную среднюю часть с минимумом и максимумом. Если в этой части какой-либо изотермы провести прямую фиксирован-

ного давления, т. е. изобару, параллельную оси Ov , то она пересечет данную изотерму в трех точках, соответствующих трем действительным корням уравнения (2-11).

2-5. Кривые фазового перехода

Рассмотрим более подробно физический смысл трех решений уравнения состояния. Наибольшее значение корня уравнения соответствует газообразному состоянию вещества и представляет объем газа v_D (рис. 2-2) при фиксированных значениях p и T . Наименьшее значение соответствует жидкому состоянию при этих же значениях давления и температуры, т. е. представляет собой объем жидкости v_A .

Среднее значение корня уравнения v_E оказывается на участке кривой, для которого производная $(\partial p/\partial v)_T$ больше нуля, т. е. на участке абсолютно неустойчивого состояния вещества. В самом деле, если бы при уменьшении удельного объема собственное давление вещества тоже уменьшалось, то такое вещество не могло бы противостоять увеличению внешнего давления и его объем сократился бы до нуля. Поэтому в интервале объемов $v_B < v < v_C$, для которого рассмотренная производная положительна, вещество может существовать только в виде двух фаз.

Таким образом, значение объема в точках C и B представляет собой предельные значения объема однородного вещества (газообразного и жидкого). При достижении этих предельных значений происходит распад вещества на две фазы: при увеличении объема сверх значения v_B , кроме жидкой, возникает газообразная фаза; при уменьшении объема ниже значения v_C возникает жидкая фаза.

Координаты точки начала перехода от газа к жидкости представляют объем насыщенного пара $v'' = v_D$ и давление насыщенного пара p_S при данной температуре T . Они могут быть определены из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p_S = \frac{RT}{v'' - v'} \ln \frac{v'' - b}{v' - b} - \frac{a}{v'' v'} \quad (2-12)$$

Здесь $v' = v_A$ — объем жидкости, находящейся под давлением своих насыщенных паров.

Условием равновесия двухфазной системы является равенство температур и давлений обеих фаз. Аналитически это условие может быть выражено в форме функциональной зависимости давления фазового равновесия от температуры, которая однозначно связывает значения обоих параметров состояния при равновесии двух фаз $p_S = f(T)$. График этой кривой называется кривой равновесия фаз или кривой фазового перехода. Как очевидно, для его построения необходимо для каждой изотермы определить давление p_S , соответствующее состоянию равновесия.

Полученную диаграмму (рис. 2-3) называют фазовой диаграммой. Все точки на диаграмме, расположенные по обе стороны кривой равновесия фаз, соответствуют однородным состояниям тела: точки над кривой или слева от нее представляют область жидкого состояния, под кривой — область газообразного состояния. Сама кривая фазового равновесия есть кривая упругости насыщенного пара.

Кривая фазового равновесия жидкости и ее пара имеет на фазовой диаграмме конечную протяженность и заканчивается в критической точке K . Критическая точка соответствует определенным для данного вещества критическим значениям температуры T_K и давления p_K .

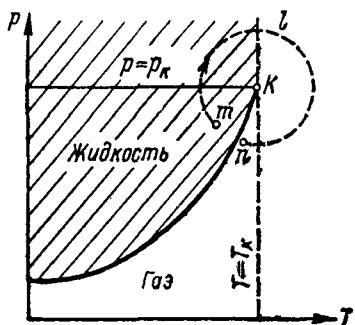


Рис. 2-3. Фазовая диаграмма вещества

При больших значениях любого из этих параметров фазовый переход невозможен и невозможно указать однозначно фазовое состояние вещества. Так, при переходе из точки m в точку n по пути $m-l-n$ невозможно указать, где именно произошел переход из жидкой фазы в газообразную. В этом проявляется условность подразделения состояний вещества на жидкое и газообразное, которые в сущности различаются лишь количественными характеристиками. Условно принимают, что жидкая фаза расположена

выше кривой фазового равновесия и левее критической изотермы. Вся остальная область рассматривается как область газообразной фазы.

Возможны метастабильные состояния вещества, когда оно остается однородным в области, где должно было бы распадаться на две фазы. Будучи устойчивой по одну сторону кривой фазового равновесия, каждая фаза (как жидкая, так и газообразная) обладает некоторой устойчивостью и по другую сторону этой кривой. Этим и определяется возможность метастабильных состояний: перегретой жидкости и переохлажденного или перенасыщенного пара.

Устойчивость метастабильных состояний мала, и они не могут существовать длительно. При соприкосновении вещества, находящегося в метастабильном состоянии, с другой фазой оно распадается на две фазы.

Вернемся теперь к pv -диаграмме на рис. 2-2.

С увеличением температуры T изотермы смещаются вверх, причем их волнообразная часть становится короче и при некоторой температуре исчезает совсем. При дальнейшем возрастании температуры изотермы приобретают вид непрерывно спадающих кривых. Температура, соответствующая предельной изотерме

с исчезающе малой (нулевой) протяженностью волнообразной части, является верхней границей двухфазных состояний, т. е. является критической. Сама предельная изотерма также называется критической изотермой. Поскольку на ней все три точки пересечения с горизонтальной кривой слились в одну, все три корня уравнения Ван-дер-Ваальса равны между собой и равны критическому объему v_K . Геометрически критическая точка есть точка перегиба критической изотермы.

Параметры критической точки, т. е. значения критического давления p_K , критического объема v_K и критической температуры T_K могут быть найдены из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}; \quad v_K = 3b; \quad T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}.$$

Наоборот, по известным значениям критических параметров могут быть определены константы уравнения Ван-дер-Ваальса a и b , которые зависят от природы вещества:

$$a = \frac{9}{8} RT_K v_K = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_K^2}{p_K};$$

$$b = \frac{v_K}{3} = \frac{1}{8} R \frac{T_K}{p_K}.$$

Из приведенных формул следует, что значение так называемого критического коэффициента $K_{кр}$ неизменно для всех веществ: $K_{кр} = \frac{RT_K}{p_K v_K} = 2,67$. Фактически величина $K_{кр}$ несколько больше и в небольших пределах меняется для разных веществ. Значения критических параметров для некоторых употребляемых в электромашиностроении охлаждающих сред приведены в табл. 2-2.

Таблица 2-2

Вещество	Критическая температура, °К	Критическое давление, атм	Критический удельный вес, кг/м ³	Газовая постоянная, м/град	Критический коэффициент
Водород	33,2	12,8	31	420,6	3,28
Гелий	5,2	2,3	69,3	212,0	3,28
Вода	647,3	225,7	323	47,07	4,36
Воздух	132,5	37,2	320	29,27	3,42
Фреон-22	369,0	50,8	513	9,78	3,64

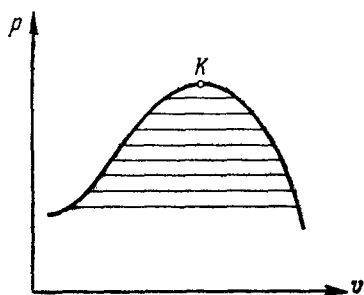


Рис. 2-4. Кривая фазового перехода на p - v -диаграмме

Если на pV -диаграмме провести непрерывную линию через все точки, соответствующие началу фазового перехода и его концу, то эта линия, как очевидно, будет пограничной, т. е. линией фазового перехода на pV -диаграмме (рис. 2-4). Справа от пограничной кривой и над ней расположена область газообразного состояния, слева (по отношению к критической точке K) — жидкого состояния. Заштрихованная область есть область двухфазного состояния. Над критической точкой фазовые превраще-

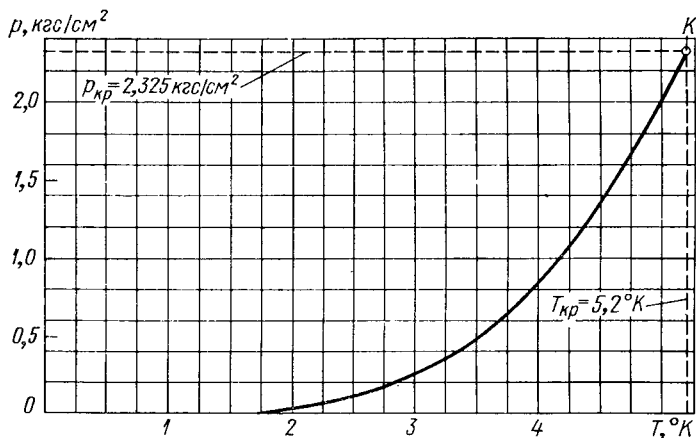


Рис. 2-5. Фазовая диаграмма для гелия

ния невозможны. На рис. 2-5 в качестве примера приведена кривая фазового перехода для гелия.

2-6. Пример расчета

Требуется рассчитать допустимые изменения давления в корпусе турбогенератора при проверке его газоплотности в зависимости от температуры газа в корпусе в течение испытаний. Если температура неизменна, давление также не должно изменяться. При изменении температуры изменения давления должны находиться в пределах, определяемых расчетом. В противном случае налицо утечки через неплотности корпуса.

Для расчета учтем состояние газа в начале испытаний и в произвольный текущий момент времени. Будем иметь: состояние в начале испытаний $p_n V = RT_n$; состояние в процессе испытаний $p_1 V = RT_1$, так как объем в корпусе неизменен. Отсюда:

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{T_1}{T_n}; \quad p_n + \Delta p = p_1; \quad p_n + \Delta p = p_n \frac{T_1}{T_n}; \quad \Delta p = p_n \left(\frac{T_1}{T_n} - 1 \right).$$

Результаты расчета допустимых отклонений давления приведены в табл. 2-3. Положительному изменению температуры ΔT соответствует положительное изменение давления Δp .

Избыточное давление газа в корпусе, кгс/см ²	Начальная температура газа, °С	Допустимые отклонения давления, мм рт. ст. при изменении температуры внутри корпуса за время испытания, °С									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	10	5	11	16	22	27	32	38	43	48	54
	20	5	10	16	21	26	31	36	42	47	52
	30	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
3,0	10	11	22	32	43	54	64	75	86	97	108
	20	10	21	31	42	52	62	73	83	94	104
	30	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5,0	10	16	32	48	65	81	97	113	129	145	161
	20	16	31	47	62	78	94	109	125	140	156
	30	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

Глава третья

КИНЕМАТИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

3-1. Описание движения жидкости

Чтобы отвести тепло от элементов конструкции электрической машины, охлаждающая среда — жидкая или газообразная — должна двигаться по каналам, поверхности которых, вообще говоря, являются теплоотдающими. При проектировании рациональной циркуляции охлаждающих сред в каналах электрических машин необходимо исходить из общих законов движения жидкостей и газов.

Для описания движения жидкости или газа, т. е. для формулирования закономерной связи между положением в пространстве частиц движущейся среды и временем наиболее естественно поступить следующим образом.

Пусть каждой частице среды в произвольный момент времени t_0 приписаны три координаты прямоугольной системы координат (a, b, c) . Тогда в момент времени $t = t_0$ положение каждой частицы однозначно задано пространственным вектором

$$\mathbf{s} = i\mathbf{a} + j\mathbf{b} + k\mathbf{c}. \quad (3-1)$$

Теперь для описания движения всех поименованных частиц (т. е. пространства \mathbf{s}) в пространстве декартовых координат, x, y, z (т. е. в пространстве \mathbf{r}) необходимо составить уравнение:

$$\mathbf{r} = F(\mathbf{s}, t). \quad (3-2)$$

Оно эквивалентно трем уравнениям в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned}x &= F_1(a, b, c, t); \\y &= F_2(a, b, c, t); \\z &= F_3(a, b, c, t).\end{aligned}\quad (3-3)$$

В соответствии с такой формой задания скорость частицы выразится как

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_s, \quad (3-4)$$

где индекс s означает, что дифференцирование происходит при постоянном s . Следует иметь в виду, что мы здесь имеем дело с дифференциальной операцией в векторном смысле, именно с дифференцированием векторной функции \mathbf{r} по скалярному аргументу t . Следовательно, вектор скорости \mathbf{w} будет иметь направление касательной к годографу вектора \mathbf{r} (рис. 3-1).

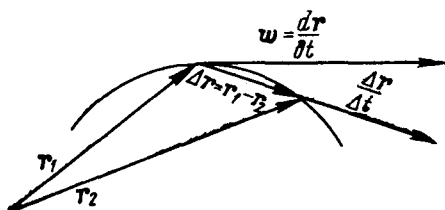


Рис. 3-1. Направление вектора скорости в пространстве

Если положить

$$\mathbf{w} = iu + jv + kw, \quad (3-5)$$

то в проекциях на координатные оси получим:

$$\begin{aligned}u &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_s = x'_s; \\v &= \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_s = y'_s; \\w &= \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_s = z'_s.\end{aligned}\quad (3-6)$$

Охарактеризованный способ задания движения называется лагранжевым представлением. Метод Лагранжа логически прост, но приводит к значительным затруднениям при решении практических задач. Он позволяет проследить судьбу отдельной частицы движущейся жидкости, т. е. характеризует движение с большой полнотой, однако сопряжен с необходимостью применения громоздкого математического аппарата.

По этой причине целесообразно рассмотреть вопрос о том, в каких случаях важно знать траекторию движения отдельной частицы жидкости. Разумеется в тех случаях, когда изучаются молекулярные взаимодействия в жидкости или газе и среда рассматривается как дисконтинуум, т. е. несплошная, дискретное задание движения частиц попросту необходимо.

Между тем развитие гидродинамики показало, что весьма плодотворной является концепция сплошной среды, так называемого континуума, в которой отвлекаются от молекулярной структуры вещества. При решении задач, основанных на этой концепции, нет необходимости изучать движение отдельных частиц, т. е. определять движение с той полнотой, какую дает метод Лагранжа.

3-2. Сплошные среды

Прежде чем перейти к характеристике другого представления движения жидкости, именно представления Эйлера, следует подробнее рассмотреть основания, по которым жидкости и газы, состоящие на самом деле из отдельных молекул, могут рассматриваться во многих практических задачах в качестве сплошных сред.

Приведем рассуждения, заимствованные у Л. Прандтля [55]. При изучении движения охлаждающих сред нас обычно не интересует движение молекул или мельчайших частиц жидкости. Важно определить, как движется вся жидкость или такие ее части, которые содержат много молекул. В частности, требуется определить скорость, которую имеет жидкость в отдельных сечениях каналов, ее температуру, давление и т. п., т. е. мы интересуемся некоторыми средними значениями состояний больших групп молекул во времени и пространстве.

Рассмотрим на примере плотности, в каких случаях можно составить такие средние значения. Плотность есть масса единицы объема. Следовательно, средней плотностью системы молекул, занимающих объем V и имеющих сумму масс m , будет

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}. \quad (3-7)$$

Такое определение не вызывает трудностей.

Несколько сложнее определить плотность в заданной точке пространства. Если плотность переменна, то при изменении рассматриваемого объема V значение средней плотности будет также изменяться. Пусть, например, мы интересуемся плотностью воздуха в верхней точке сужающегося кверху конического помещения, которое находится под атмосферным давлением. Средняя плотность для всего объема помещения $\rho_{\text{ср}}$ может быть определена описанным выше способом. Будем уменьшать теперь рассматриваемый объем, беря вторым этапом его верхнюю половину, затем верхнюю половину остатка и т. д. (для этого помещение мысленно рассекается горизонтальными плоскостями, все время приближающимися к верхней точке). Поскольку плотность воздуха при повышении уровня над землей уменьшается, график ее зависимости от величины рассматриваемого объема будет иметь в нашем случае вид функции, убывающей

вместе с объемом (рис. 3-2). Но так как для небольших объемов плотность практически постоянна, при достижении некоторой величины объема ΔV_0 зависимость плотности от величины ΔV_i сведется на нет и на графике появится участок, параллельный оси абсцисс. При дальнейшем уменьшении рассматриваемого объема, в особенности при его приближении к нулю, величина плотности будет подвержена все большим колебаниям и в пределе также окажется равной нулю, либо, наоборот, станет бесконечно большой, в зависимости от того, окажется в рассматриваемой точке пространства (верхней точке конуса) молекула воздуха или нет.

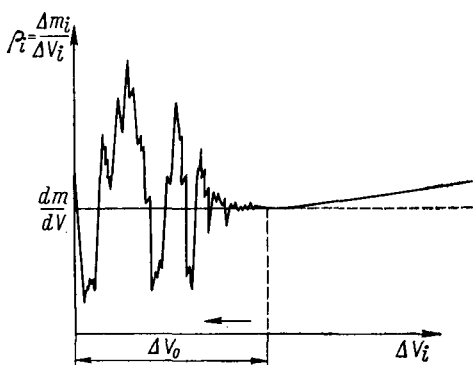


Рис. 3-2. Зависимость средней плотности воздуха от рассматриваемого объема

Анализ полученного графика показывает, что для характеристики средней плотности в интересующей нас точке пространства наиболее предпочтительно было бы рассматривать такой объем ΔV_0 , включающий эту точку, для которого плотность практически постоянна. Для реализации такого предложения необходимо убедиться, что выбранный объем ΔV_0 достаточно мал

по сравнению с другими геометрическими размерами системы (например, объемом всего помещения) и в то же время достаточно велик по сравнению с межмолекулярными размерами, т. е. число входящих в него молекул позволяет составить среднее значение.

Один кубический сантиметр воздуха при атмосферном давлении содержит $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Следовательно, если принять за ΔV_0 объем воздуха 10^{-12} см^3 , т. е. с наибольшим линейным размером $1/1000 \text{ мм}$, то число молекул в этом объеме $2,7 \cdot 10^7$ окажется достаточно большим. В то же время плотность воздуха в нем практически неизменна.

Таким образом, когда дело идет о жидкостях или неразреженных газах, в практических задачах можно вполне отвлечься от их молекулярной структуры и оперировать средними значениями параметров, т. е. рассматривать жидкости и газы как квазиконтинуумы. Это правило неприемлемо для сильно разреженных газов, а также при изучении физических процессов диффузии, внутреннего трения и теплопроводности. Однако для описания движения охлаждающих сред по каналам оно вполне справедливо.

3-3. Эйлерово представление движения жидкости

Исходя из необходимости определять характеристики потока в заданных точках пространства и из стремления максимально упростить форму уравнений движения, создатель теоретической гидродинамики Л. Эйлер рассмотрел все пространство как поле скоростей жидкости, заданное уравнением:

$$\mathbf{w} = F(\mathbf{r}, t), \quad (3-8)$$

или в проекциях:

$$\begin{aligned} u &= F_1(x, y, z, t); \\ v &= F_2(x, y, z, t); \\ w &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (3-9)$$

Сразу же видно, что такое представление позволяет ответить на вопрос: что происходит в определенные моменты времени в отдельных точках пространства.

Принципиально Эйлерово представление позволяет перейти к представлению Лагранжа, если необходимо проследить судьбу отдельных частиц жидкости. Поскольку для каждой частицы

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

то при использовании уравнений (3-9) получим систему трех совместных дифференциальных уравнений первого порядка для x, y, z в зависимости от t . Однако решение такой системы уравнений чрезвычайно затруднительно.

3-4. Линии и трубки тока в поле скоростей жидкости

В соответствии с представлением Эйлера уравнение $\mathbf{w} = F(\mathbf{r}, t)$ задает поле скоростей жидкости во всем рассматриваемом пространстве. Иначе говоря, в каждой точке пространства скорость задается по величине и направлению для любого момента времени.

Если поле зафиксировать в какой-либо определенный момент времени $t = t_0$ и провести кривые, направление которых в каждой их точке совпадает с направлением скорости в этой точке, то получим кривые, называемые линиями тока.

По определению линий тока вектор скорости касателен к ним в каждой точке. Точно так же касателен к этим линиям и дифференциал радиуса-вектора поля $d\mathbf{r}$ (рис. 3-1). В векторной форме этот факт коллинеарности двух векторов \mathbf{w} и $d\mathbf{r}$ записывается уравнением: $d\mathbf{r} \times \mathbf{w} = 0$, или в координатах:

$$vdz - wdy = wdx - udz = udy - vdx = 0,$$

откуда

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz}. \quad (3-10)$$

В случае стационарных полей, когда в произвольной точке состояние жидкости не меняется во времени, линии тока (3-10) неизменны и совпадают с траекториями движения частиц жидкости.

Возьмем теперь в поле скоростей непрерывную замкнутую кривую и проведем линии тока, проходящие через все ее точки.

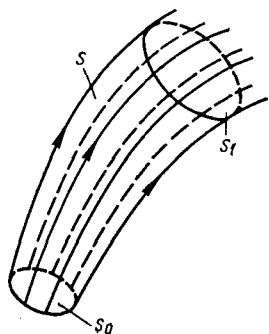


Рис. 3-3. Трубка тока

Полученная трубка (рис. 3-3) называется трубкой тока. В каждый момент времени линии тока, образующие стенки трубки, имеют направление скоростей во всех точках поверхности стенки. Поэтому в каждый данный момент времени жидкость не может протекать через стенки трубки тока как изнутри трубки наружу, так и снаружи внутрь. Таким образом, трубка тока ведет себя в любой фиксированный момент времени как труба с жесткими непроницаемыми стенками, внутри которой течет определенное количество жидкости.

Если же поле стационарное, т. е. линии тока неизменны, то всякая трубка тока поля скоростей жидкости в течение всего процесса ведет себя как неподвижная труба.

3-5. Анализ поля скоростей жидкости

Функцию, определяющую скорость в заданной точке поля,

$$\mathbf{w}_0 = iu_0 + jv_0 + kw_0$$

можно считать аналитической функцией места (т. е. функцией, удовлетворяющей условиям непрерывности и дифференцируемости).

Следовательно, скорость вблизи рассматриваемой точки можно представить разложением в ряд Тейлера

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \nabla \mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{l} + \nabla \nabla \mathbf{w} \cdot \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2}{2!} + \dots \quad (3-11)$$

Здесь символ \cdot означает скалярное произведение векторов, а оператор ∇ (его называют «набла» или оператор Гамильтона) рассматривается как вектор:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3-12)$$

В проекциях на декартовы оси координат разложение (3-11) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z} (z - z_0) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\
 v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial z} (z - z_0) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (3-13) \\
 w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial w}{\partial z} (z - z_0) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots
 \end{aligned}$$

Не нарушая общности, рассматриваемую точку можно поместить в начало координат и считать ее скорость равной нулю. Если, кроме того, ограничиться рассмотрением ближайшей окрестности точки, то членами разложения степени выше первой можно пренебречь, причем ошибка не превзойдет сколь угодно малой величины. Тогда из (3-11) следует:

$$\mathbf{w} = \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}. \quad (3-14)$$

Точно так же из (3-13) получим:

$$\begin{aligned}
 u &= x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}; \\
 v &= x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z}; \\
 w &= x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z}.
 \end{aligned} \quad (3-15)$$

Учитывая важность последнего разложения и некоторые дальнейшие операции, получим (3-15) непосредственно из (3-14). Для этого рассмотрим подробнее первый сомножитель правой части уравнения (3-14).

$$\nabla \mathbf{w} = \text{grad } \mathbf{w} = \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}. \quad (3-16)$$

Полученные справа произведения называются диадами. Правила вычислений с ними в основном те же, что и для обычных чисел, но с обязательным соблюдением порядка записи векторов, являющихся сомножителями:

$$\mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w) = \mathbf{i}\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{i}\mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично раскрываются диады $\mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}$ и $\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}$, так что имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{w} = & \mathbf{ii} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{ij} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{ik} \frac{\partial w}{\partial x} + \mathbf{ji} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{jj} \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{jk} \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & + \mathbf{ki} \frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{kj} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathbf{kk} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3-17)$$

Таким образом градиент вектора \mathbf{w} определяется с точностью до бесконечно малых высокого порядка заданием девяти частных производных, составляющих матрицу:

$$\Pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (3-18)$$

В то же время, как мы видели выше, величина $\Pi = \nabla \mathbf{w}$ в векторной форме представляет собою сумму трех диад $\mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$, $\mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}$, $\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}$; она составляется из векторов $\mathbf{p}_x = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$, $\mathbf{p}_y = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}$ и $\mathbf{p}_z = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}$ точно так же, как вектор \mathbf{a} составляется из трех скаляров a_x , a_y и a_z , являющихся его проекциями на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \mathbf{ip}_x + \mathbf{jp}_y + \mathbf{kp}_z; \\ \mathbf{a} &= \mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z. \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

Величина Π называется тензором, а матрица (3-18) девятичленной формой тензора. Заметим, что составляющие матрицы или, как их называют, компоненты тензора Π представляют собой величину проекций векторов \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z на оси координат.

В самом деле

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right)_x = \left(\mathbf{i} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)_x = \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

Аналогично

$$p_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad p_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad p_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ и т. д.}$$

Физически тензор Π определяет напряженное состояние в фиксированной точке поля, причем векторы p_x , p_y и p_z есть не что иное, как напряжения на малые площадки, перпендику-

лярные осям Ox , Oy и Oz и ограничивающие рассматриваемую окрестность.

Вернемся теперь к представлению скоростного поля.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} = \Pi \cdot \mathbf{r} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \\
 &= x \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = x\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + x\mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial x} + x\mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 &+ y\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y} + y\mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial y} + y\mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial y} + z\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial z} + z\mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial z} + z\mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial z} = \\
 &= \mathbf{i} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\
 &= \mathbf{k} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3-21)
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w,$$

следует (3-15).

Таким образом, поле скоростей \mathbf{w} можно рассматривать как скалярное произведение тензора Π на вектор \mathbf{r} справа, дающее новый вектор (3-21):

$$\begin{aligned}
 \Pi \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{i}(\rho_{xx}x + \rho_{xy}y + \rho_{xz}z) + \mathbf{j}(\rho_{yx}x + \rho_{yy}y + \rho_{yz}z) + \\
 &+ \mathbf{k}(\rho_{zx}x + \rho_{zy}y + \rho_{zz}z) = \begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{w}. \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

Составляющие вектора (3-22) линейным однородным образом выражаются через составляющие вектора \mathbf{r} , причем коэффициентами разложения являются компоненты тензора Π .

В указанном смысле тензор Π может рассматриваться в качестве дифференциального оператора, определяющего преобразование (3-22). Полученное разложение называется линейной векторной функцией вектора \mathbf{r} , определяемой девятью частными производными трех составляющих u , v и w скорости \mathbf{w} по трем направлениям x , y и z . Тензор Π называется афинным ортогональным тензором (второго ранга).

Афинность преобразования (3-22), определяемого тензором Π , важна для понимания природы скоростного поля жидкости. Она означает, что вектор скорости \mathbf{w} в малой окрестности фиксированной точки поля (однородной деформации), изменяется пропорционально расстоянию от указанной точки.

К анализу такого общего определения скоростного поля полезно вернуться после рассмотрения приведенных ниже важнейших частных случаев.

3-6. Составляющие поля скоростей

Рассмотрим простейший пример скоростного поля, у которого все члены матрицы Π (3-18), кроме первого $p_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, равны нулю. Тогда в соответствии с (3-17) будем иметь:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{xx} = \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{i} \mathbf{i} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как

$$\mathbf{i} \mathbf{r} = \mathbf{i} (ix + jy + kz) = x,$$

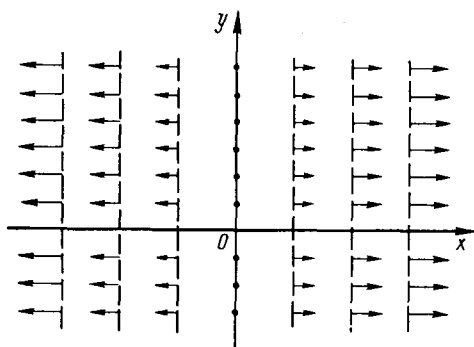


Рис. 3-4. Скорость растяжения в направлении x

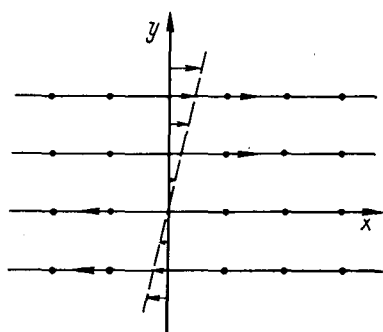


Рис. 3-5. Скорости сдвига в направлении x

то

$$\mathbf{w}_{xx} = ix \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3-23)$$

откуда

$$u = x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad v = 0; \quad w = 0.$$

Прежде всего очевидно, что вектор скорости \mathbf{w} параллелен оси Ox . Кроме того, по величине этот вектор пропорционален координате x , т. е. расстоянию от начала координат, и неизменен в каждой плоскости $x = \text{const}$, параллельной плоскости yz . Таким образом, выражение (3-23) определяет картину растяжения в направлении оси Ox , изображенную на рис. 3-4.

Как очевидно, аналогичные картины растяжения в направлениях Oy и Oz будут получены, если принять за ноль все члены матрицы Π , кроме $\frac{\partial v}{\partial y}$ или $\frac{\partial w}{\partial z}$. Скорость поля тогда будет задана уравнениями:

$$\mathbf{w}_{yy} = \mathbf{j} \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{j} y \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\mathbf{w}_{zz} = \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial w}{\partial z} = \mathbf{k} z \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Если теперь положить равными нулю все члены матрицы Π , кроме du/dy , то будем иметь

$$\mathbf{w}_{xy} = \mathbf{ij} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{iy} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3-24)$$

откуда

$$u = y \frac{\partial u}{\partial y}; \quad v = 0; \quad w = 0.$$

Здесь скорости параллельны оси Ox и имеют постоянное значение в плоскостях $y = \text{const}$, параллельных плоскости zx . Их величина пропорциональна координате y , т. е. расстоянию от плоскости zx . Таким образом, выражение (3-24) определяет картину сдвига в направлении оси Ox , изображенную на рис. 3-5.

Аналогичные картины сдвига, но в направлениях Oy и Oz будут получены, если принять за ноль все члены матрицы Π , кроме dv/dx или $d\omega/dx$. Уравнениями скорости сдвига при этом будут

$$\mathbf{w}_{yx} = \mathbf{ji} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{jx} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (3-25)$$

$$\mathbf{w}_{zx} = \mathbf{ki} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \mathbf{kx} \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (3-26)$$

При рассмотрении более сложного поля, когда несколько членов матрицы Π не равны нулю, учитывая линейную зависимость скорости от координат, можно применить метод наложения или суперпозиции, в соответствии с которым суммарное поле определяется как сумма составляющих полей. Формально этот вывод следует прямо из (3-17).

Проанализируем в качестве примера линейную комбинацию двух рассмотренных выше полей (3-24) и (3-25).

$$\mathbf{w}_{xy+yx} = \mathbf{iy} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{jx} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3-27)$$

Если производные du/dx и dv/dx равны друг другу и имеют одинаковые знаки, выражение (3-27) определяет картину сдвига или, иначе говоря, поле скоростей изменения первоначального прямого угла в острый либо тупой (рис. 3-6).

Если при равенстве производных du/dy и dv/dx их знаки противоположны, получим поле скоростей вращения жидкости вокруг рассматриваемой точки (рис. 3-7).

Если же в более общем случае производные du/dy и dv/dx имеют произвольные значения, то при одинаковых знаках производных скорость сдвига определится их алгебраической суммой:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3-28)$$

При разных знаках производных (dv/dx и $-du/dy$) среднее вращение определится как среднее арифметическое обеих угловых скоростей

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3-29)$$

Последнее выражение аналогично величине угловой скорости ω твердого тела, у которого составляющие линейной скорости по осям Ox и Oy равны $(-u)$ и $(+v)$.

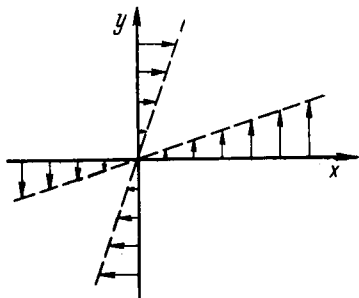


Рис. 3-6. Скорости сдвига в направлениях x и y

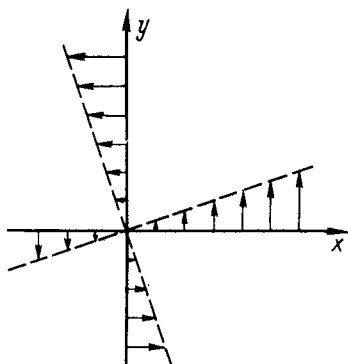


Рис. 3-7. Скорости вращения

Поскольку скоростное поле в самом общем случае описывается скалярным произведением

$$\mathbf{w} = \Pi \cdot \mathbf{r},$$

его анализ целесообразно производить через компоненты матрицы (тензора) Π .

Если ввести в рассмотрение тензор Π_c , сопряженный с данным тензором Π и описываемый матрицей, у которой в качестве строк взяты столбцы тензора Π , а в качестве столбцов — строки:

$$\Pi_c = \begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{yx} & \rho_{zx} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{zy} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{vmatrix},$$

то тензор Π разложится на сумму двух тензоров (Σ и A):

$$\Pi = \Sigma + A,$$

где

$$\Sigma = \frac{\Pi + \Pi_c}{2},$$

$$A = \frac{\Pi - \Pi_c}{2},$$

что можно получить, выполнив необходимые операции.

Тензор Σ , называемый симметричным тензором, обладает следующим свойством

$$\rho_{kl} = \rho_{lk}.$$

Это означает, что его компоненты, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой, т. е. его матрица определяется шестью величинами:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3-30)$$

Тензор A , называемый антисимметричным тензором, обладает свойством:

$$\rho_{kl} = -\rho_{lk}.$$

Это означает, что величина любого компонента при перестановке индексов меняется на противоположную. Отсюда, учитывая, что $\rho_{kk} = -\rho_{kk}$, получим $\rho_{kk} = 0$. Следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & 0 & -\rho_{yz} \\ -\rho_{xz} & \rho_{yz} & 0 \end{vmatrix}, \quad (3-31)$$

т. е. матрица антисимметричного тензора определяется заданием трех величин.

Используем теперь тензорную запись для анализа скоростного поля. Из предыдущих рассуждений вытекает, что симметричный тензор Σ представляет собой выражение только для скоростей растяжения и сдвига [см. (3-24)—(3-28)]. Антисимметричный тензор дает выражения для скорости вращения (3-27), (3-29). В последнем можно убедиться непосредственно:

$$\rho_x = i0 + j(-\rho_{xy}) + k\rho_{xz} = -j \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\rho_y = i\rho_{xy} + j0 + k(-\rho_{yz}) = i \frac{\partial v}{\partial x} - k \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\rho_z = i(-\rho_{xz}) + j\rho_{yz} + k0 = -i \frac{\partial w}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$A = i \left(-j \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial x} \right) + j \left(i \frac{\partial v}{\partial x} - k \frac{\partial v}{\partial z} \right) + k \left(-i \frac{\partial w}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (3-32)$$

Как следует из приведенного выше анализа компонентов поля, выражение (3-32) не содержит скоростей растяжения и определяет лишь скорости сдвига (вращения).

Можно показать, что (3-32) представляет некоторый аксиальный вектор [36]. Таким образом, антисимметричный тензор есть вектор ротации скоростного поля.

3-7. Геометрия векторного поля скорости

Приведем без доказательства хорошо известные читателю-электрику теоремы Стокса и Остроградского—Гаусса, заметив только, что в силу совершаемого при их выводе предельного перехода ограничение размеров окрестности анализируемой точки скоростного поля, которое мы ввели в § 3-5, здесь отпадает, и теоремы верны для любых полей, включая неоднородные.

Теорема Стокса позволяет преобразовывать линейный интеграл в поверхностный и обратно. Она формулируется следующим образом:

линейный интеграл от вектора скорости \mathbf{w} вдоль замкнутого контура L (циркуляция скорости вдоль L) равен поверхностному интегралу от ротора этого вектора ($\text{rot } \mathbf{w}$) по поверхности, ограниченной кривой L ,

$$\oint_L \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_s \text{rot } \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3-33)$$

В этом выражении $\text{rot } \mathbf{w}$ представляет вектор ротации поля. Он равен

$$\text{rot } \mathbf{w} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}}{s} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3-34)$$

где $\oint_L \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \omega_i dl$ — циркуляция вектора \mathbf{w} вдоль замкнутого контура L .

Как видно непосредственно из (3-33), для замкнутой поверхности двойной интеграл в правой части равен нулю, поскольку равен нулю путь интегрирования L в левой части.

С применением дифференциального оператора набла вектор ротора может быть представлен как векторное произведение

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w}, \quad (3-35)$$

составляющие которого по осям Ox , Oy , Oz как раз и дадут выражения

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Векторное произведение (3-35) может быть записано также в виде матрицы:

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Важным следствием теоремы Стокса (3-33) является утверждение: *ротация потенциального поля равна нулю*. В самом деле, если вектор поля имеет потенциал, т. е. $\mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — скаляр, то линейный интеграл по любому замкнутому контуру в таком поле тождественно равен нулю

$$\oint_L \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r} \equiv 0,$$

так как в потенциальном поле

$$\int_{r_1}^{r_2} \operatorname{grad} \varphi dr = \int_{r_1}^{r_2} d\varphi = \varphi(r_2) - \varphi(r_1).$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

что непосредственно следует и из операторной записи:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = (\nabla \times \nabla) \varphi \equiv 0$$

(векторное произведение двух одинаковых векторов всегда равно нулю). Таким образом, потенциальное поле есть поле безвихревое.

Сформулируем теперь теорему Остроградского—Гаусса, которая позволяет преобразовывать поверхностный интеграл в объемный и обратно:

поток вектора скорости \mathbf{w} сквозь замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции этого вектора, взятому по объему, ограниченному рассматриваемой поверхностью:

$$\oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV. \quad (3-36)$$

В этом выражении $\operatorname{div} \mathbf{w}$ представляет скалярную величину, характеризующую обильность источников поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}}{V} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3-37)$$

где $\oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \oint_s \omega_n ds$ есть поток вектора \mathbf{w} через замкнутую поверхность s .

Векторное поле, у которого дивергенция во всех точках равна нулю, называется трубчатым или соленоидальным. Если в таком поле рассмотреть какую-либо трубку тока (см. рис. 3-3), то сразу видно, что поток вектора скорости сквозь любую замкнутую поверхность трубки, образованную ее пересечением двумя нормальными к линиям тока плоскостями, равен нулю.

В самом деле, поскольку боковая поверхность s составлена из линий тока и, следовательно, линиями тока не пересекается, в выражении для дивергенции скорости остаются два члена равной величины и противоположных знаков, определяющие поток вектора через поверхности s_0 и s_1 , ограниченные контурами входа в трубку и выхода из нее:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{s_0} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{s_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

т. е. в поле без источников через каждое сечение векторной трубки протекает одно и то же количество жидкости.

Можно показать, что поле ротора скорости \mathbf{w} всегда является соленоидальным. Действительно, если $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, то $\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, так как вектор $\nabla \times \mathbf{A}$ есть вектор, перпендикулярный к Δ и \mathbf{A} , и поэтому скалярное произведение этого вектора на ∇ равно нулю. Справедливо и обратное утверждение: всякое соленоидальное скоростное поле является полем ротации некоторого вектора, т. е. если

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0,$$

то существует такое векторное поле \mathbf{B} , что

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

В этом случае вектор \mathbf{B} называется векторным потенциалом поля \mathbf{w} .

Приведем теперь небольшую сводку полученных ранее формул и несколько дополним ее:

$$\begin{aligned} \Pi &= \nabla \mathbf{w} \text{ — тензор,} \\ \operatorname{rot} \mathbf{w} &= \nabla \times \mathbf{w} \text{ — вектор,} \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= \nabla \cdot \mathbf{w} \text{ — скаляр,} \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \times \nabla \varphi = 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{w} &= \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{w} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь дифференциальные операции второго порядка, не приводящие к нулевому результату.

Пусть $\mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$. Определим дивергенцию этого поля

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ есть оператор Лапласа.

Пусть теперь $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{A}$. Определим ротацию этого поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{w} &= \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned}$$

В заключение заметим, что всякое векторное поле можно разложить на две составляющие, для одной из которых будет равна нулю ротация, для другой — дивергенция. Это позволяет решить обратную задачу, т. е. по заданным значениям ротации и дивергенции найти векторное поле [36].

Глава четвертая

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ЕГО ИНТЕГРАЛ

4-1. Понятие давления в жидкости

Приступая к составлению уравнения движения жидкости, необходимо рассмотреть силы, действующие в ней, в частности силы в предельном случае нулевой скорости движения, т. е. в состоянии покоя.

Определим в качестве аксиомы, что в состоянии покоя равнодействующая всех внешних сил, приложенных к произвольному объему жидкости, равна нулю.

Внешние силы могут быть поверхностными (например, силы давления на рассматриваемый объем жидкости) и объемными (например, сила тяжести и центробежная). Внутренние, т. е. межмолекулярные, силы не рассматриваются, так как они действуют всегда попарно, причем равны по величине и противоположны по знаку.

Замечательной особенностью жидкостей является характер направленности внешних сил, подсказанный многочисленными экспериментами. *В состоянии покоя внешние силы всегда перпендикулярны к любому элементу поверхности, ограничивающей выделенный произвольный объем, причем направлены всегда снаружи внутрь.* Это означает, что при отсутствии движения в жидкости отсутствуют и какие бы то ни было касательные напряжения и, кроме того, жидкость не выдерживает напряжений растяжения, а может противостоять лишь напряжениям сжатия.

Сформулированная особенность направления внешних сил может быть принята за определение (опытный закон) жидкости.

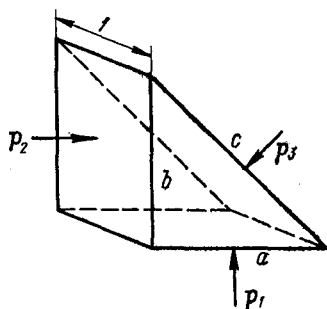


Рис. 4-1. Равновесие жидкой призмы

Теперь для определения понятия давления в жидкости рассмотрим объем такой формы, которая наиболее удобно позволяет написать условия равновесия. При этом воспользуемся указанием о направлениях внешних сил.

Выделим в покоящейся жидкости призму с основанием в виде прямоугольного треугольника и высотой, равной единице (рис. 4-1), и рассмотрим действующие по трем координатным направлениям поверхностные силы.

Поверхностные силы, отнесенные к единице поверхности, назовем напряжениями. Пусть напряжения на поверхностях $s_1 = a \cdot 1$, $s_2 = b \cdot 1$ и $s_3 = c \cdot 1$ равны соответственно p_1 , p_2 и p_3 . В силу равновесия выделенного объема жидкости суммы вертикальных и горизонтальных проекций действующих сил должны быть равны нулю. Предположим вначале, что объемные силы отсутствуют.

Тогда получим

$$p_1 a - p_3 c \cos(\hat{a}, c) = 0;$$

$$p_2 b - p_3 c \cos(\hat{b}, c) = 0.$$

Но

$$c \cos(\hat{a}, c) = a \text{ и } c \cos(\hat{b}, c) = b.$$

Следовательно, $p_1 - p_3 = 0$ и $p_2 - p_3 = 0$, т. е.

$$p_1 = p_2 = p_3. \quad (4-1)$$

Размер призмы был взят произвольно. Поэтому, если стягивать ее объем к точке A , окажется, что при равновесии сила на единицу поверхности в точке A , т. е. напряжение в точке A , не зависит от направления элемента поверхности, на который она действует.

Это не зависящее от направления действия напряжение жидкости, находящейся в равновесии, называется давлением жидкости в точке A .

Сразу же подчеркнем, что при движении всякой реальной жидкости проявляются силы вязкости, т. е. касательные напряжения или напряжения сдвига. Они тем меньше, чем меньше скорость относительного перемещения слоев и чем меньше вязкость. Если вязкость столь мала, что ее влиянием можно пренебречь (идеальная жидкость), то тогда напряжения в точке не будут зависеть от направления площади и в случае движения. Однако указанная абстракция, хотя и позволяет достаточно точно описать характер некоторых простейших движений жидкостей с очень малой вязкостью, совершенно непригодна для вычисления сопротивления жидкостей при их движении.

Покажем, что пренебрежение объемными силами, которое мы допустили, не нарушает общности вывода о направлении напряжений в точке. В самом деле, стягивая объем выделенного

элемента к нулю, мы всегда делаем бесконечно малым сравнительное участие объемных сил в действии на частицу жидкости, так как поверхностные силы пропорциональны второй степени линейных размеров, а объемные — третьей.

4-2. Связь между распределением давления и силой тяжести

Известно, что давление внутри покоящейся жидкости связано с действием объемных сил, в частности с действием силы тяжести. За единицу силы тяжести удобно принять силу на единицу массы g , имеющую размерность ускорения. Если не рассматривать другие массовые силы, например центробежную, для которых все выводы будут аналогичными, то силовое поле будет определено вектором силы g , который всегда направлен к центру тяжести Земли, называется поэтому центральной силой и является непрерывной функцией места (координат точки).

Рассмотрим зависимость давления от объемной силы в направлении силового поля. Пусть образующая элементарного жидкого цилиндра параллельна вектору силы g и основания ΔF находятся на двух поверхностях равного давления p и $p + \Delta p$ (рис. 4-2). Формулируя условия равновесия цилиндра в направлении силы g , учтем, что силы давления на боковую поверхность цилиндра перпендикулярны этому направлению и на него не проектируются. Тогда получим, что вес жидкого цилиндра должен быть уравновешен разностью сил давления на основания:

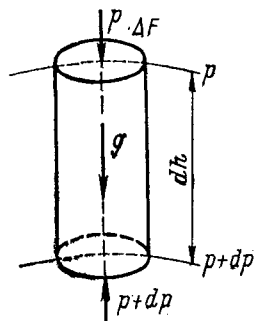


Рис. 4-2. Равновесие жидкого цилиндра

$$\rho dh \Delta F g = (p + dp) \Delta F - p \Delta F = dp \Delta F,$$

откуда

$$\frac{dp}{dh} = \rho g. \quad (4-2)$$

Таким образом, давление внутри жидкости возрастает в направлении активной силы так, что его приращение на единицу длины равно произведению плотности на активную силу.

Заметим, что ось координат z обычно направлена снизу вверх, т. е. противоположно силе тяжести. Поэтому для силы тяжести справедливо уравнение:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma, \quad (4.3)$$

где γ — удельный вес жидкости, $кгс/м^3$.

Интеграл этого уравнения дает известную формулу гидростатического давления:

$$\int_p^{p_1} dp = -\gamma \int_z^{z_1} dz$$

или

$$p_1 - p = -\gamma(z_1 - z).$$

Отсюда

$$p_1 = p - \gamma(z_1 - z) = p + \gamma(z - z_1) = p + \gamma h, \quad (4-4)$$

если считать, что h берется в направлении силы тяжести g .

4-3. Сила инерции в движущейся жидкости

Чтобы определить силу инерции элемента объема dV движущейся жидкости, равную произведению массы элемента на ускорение, следует рассмотреть предварительно оба сомножителя более подробно.

Масса элемента объема выражается через его плотность ρ достаточно просто: ρdV . Что же касается ускорения, которое по общему правилу есть производная вектора скорости \mathbf{w} по времени t , то следует учесть при его вычислении, что вектор \mathbf{w} зависит не только от времени, но и от места:

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{r}, t) = f(x, y, z, t).$$

Поэтому полная производная $\frac{d\mathbf{w}}{dt}$ должна быть взята как производная сложной функции \mathbf{w} от t :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{w}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w) \cdot \nabla \mathbf{w} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Первый член полученной суммы характеризует изменение скорости во времени в данной точке поля и называется локальной производной вектора скорости. Второй член характеризует изменение скорости во времени, связанное с изменением положения в пространстве рассматриваемой точки, координаты которой зависят от времени $x=x(t)$; $y=y(t)$, $z=z(t)$. Он называется конвективной производной вектора скорости. Само ускорение, или полная производная $D\mathbf{w}/dt$, носит название материальной или субстанциональной производной.

Таким образом, *субстанциональная производная равна локальной производной плюс конвективная производная.*

Понятию конвективной производной может быть дано наглядное геометрическое толкование, одновременно поясняющее происхождение термина «конвективная».

Рассмотрим в пространстве переменное поле температуры $T = T(\mathbf{r}, t)$. Пусть в фиксированный момент времени $t = t_0$ изотермы $T = \text{const}$ имеют такой вид, как на рис. 4-3. Рассмотрим частицу жидкости, занимающую в момент времени t_0 положение в пространстве \mathbf{r}_1 и в момент времени $t_0 + dt$ положение \mathbf{r}_2 . Учтем, что перемещение частицы в рассматриваемый промежуток времени составит $\mathbf{w}dt$. Если бы частица жидкости находилась в покое, изменение ее температуры было бы связано лишь с изменением температуры точки поля \mathbf{r}_1 за время dt , что характеризуется локальной производной dT/dt . Поскольку за время dt частица переместилась в точку поля \mathbf{r}_2 , к локальному изменению температуры следует прибавить изменение за счет перемещения. Оно вычисляется как скалярное произведение градиента температуры (изменение на единицу длины в направлении нормали к изотермам) на проекцию пройденного пути на это направление (фактическое изменение длины в направлении нормали). Следовательно, конвективное изменение в единицу времени будет равно $\mathbf{w} \cdot \text{grad } T$. Таким образом, субстанциональная производная температуры равна:

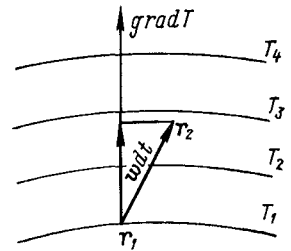


Рис. 4-3. Конвективная производная поля

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } T.$$

В случае поля произвольной величины ω , скалярной, векторной или тензорной,

$$\frac{D\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } \omega.$$

Следовательно, для случая поля скорости \mathbf{w} получим $\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w}$. Теперь может быть записано выражение для силы инерции элемента объема:

$$\rho dV \frac{D\mathbf{w}}{dt}. \quad (4-6)$$

4-4. Сила трения в движущейся жидкости

Рассмотрим элемент объема жидкости в форме куба, ось которого направлена в сторону его движения (рис. 4-4).

Как указывалось выше (§ 2-2), касательные напряжения на гранях куба $ABCD$ и $MNLE$ пропорциональны градиенту скорости:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4-7)$$

В свою очередь приращение касательного напряжения в направлении оси y есть разность его значений на обеих рассматриваемых гранях, отстоящих друг от друга на величину dy :

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) - \tau = \frac{\partial \tau}{\partial y} dy.$$

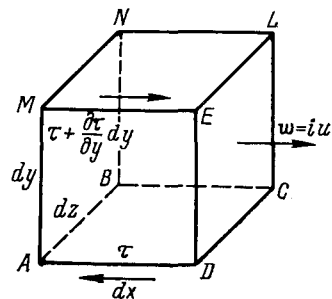


Рис. 4-4. Напряжения трения в элементе объема

Чтобы определить силу трения, приращение напряжения сдвига по двум граням элемента следует умножить на величину грани $dx dz$. Получим

$$dF = \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dV$$

или, подставляя вместо τ его выражение из (4-7),

$$dF = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV.$$

Аналогичные вычисления могут быть выполнены для других направлений составляющей скорости u . Будем иметь

$$dF_x = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV \quad (4-8)$$

или в общем случае векторного поля w

$$dF = \mu \Delta w dV. \quad (4-9)$$

4-5. Классификация сил, приложенных к элементу объема движущейся жидкости

Полезно классифицировать рассмотренные выше силы, которые приложены к элементу объема движущейся жидкости. Такая классификация поможет в дальнейшем провести анализ некоторых частных случаев движения, одним из которых является состояние покоя.

Как мы видели, в состоянии покоя на элемент объема жидкости действуют две силы:

1) активная сила (вектор силового поля), или сила тяжести элемента объема $\rho g dV$;

2) сила давления со стороны окружающих частиц жидкости $\text{grad } pdV$.

Эта на первый взгляд простейшая ситуация требует, однако, некоторого пояснения. Как будет видно из дальнейшего изложения, при анализе движения элемента объема силу тяжести можно исключить из рассмотрения, если соблюдены некоторые простые условия. Возможность такого исключения физически объясняется тем, что на каждую частицу жидкости со стороны других частиц действует подъемная сила, которая уравнивает силу тяжести данной частицы. Таким образом, при перемещении элемента объема в поле сил тяжести работа преодоления этих сил практически не совершается.

Все это, однако, не означает, что из рассмотрения может быть исключен градиент давления, т. е. поверхностная сила на единицу объема, которая в состоянии покоя уравнивает силу тяжести, что и выражается в форме закона гидростатического давления (4-2). Здесь следует иметь в виду, что при движении градиент давления является следствием воздействия всех участвующих сил и, следовательно, направлен в пространстве в общем случае произвольно. Поэтому при исключении действия силы тяжести в направлении оси z пропадает лишь одна составляющая градиента давления. Сама же поверхностная сила, равная $\text{grad } pdV$, остается.

В состоянии движения к двум перечисленным силам — тяжести и поверхностной силе давления — добавляются еще две силы:

- 1) сила трения,
- 2) сила инерции.

В соответствии с основным законом механики, действительным для произвольного объема движущейся жидкости, все перечисленные силы, поскольку в них включена и сила инерции, уравниваются. Это простое рассуждение позволяет получить уравнение движения.

Дополнительного рассмотрения заслуживает сила трения, которая пропорциональна вязкости и, следовательно, для многих практически важных жидкостей и газов (вода, воздух) может оказаться по величине чрезвычайно незначительной. Здесь мы только отметим, что исключение силы трения из уравнения движения позволяет для маловязких жидкостей получить ответ на многие важнейшие вопросы, характеризующие движение. Однако в этом случае без ответа остается один из них, который в приложениях может считаться основополагающим, — именно вопрос о величине сопротивления при движении жидкостей, так как жидкость без трения (идеальная жидкость) вообще не обладает сопротивлением.

4-6. Уравнение движения несжимаемой жидкости

Выше были получены выражения для всех сил, действующих на элемент объема несжимаемой жидкости при ее движении. Учет сжимаемости капельных жидкостей лишен смысла практически во всех инженерных задачах. Что касается газов, то их сжимаемость проявляется не только под воздействием внешнего давления, но и в результате движения самих газов. Однако величина градиента давления, связанного с изменением плотности газа по сравнению с другими имеющимися разностями давления, в обычной практике бывает чрезвычайно мала. В частности, в конструкциях электрических машин при движении газов в каналах их скорость всегда существенно меньше скорости звука, что приводит к столь малым изменениям плотности газов, что их практически не удается измерить. По этой причине газы, как и капельные жидкости, могут считаться практически несжимаемыми, так что их плотность ρ остается постоянной на всем пути движения газа.

При указанном ограничении другие силы, кроме рассматриваемых, в движении элемента объема не участвуют. Тогда применение основного закона динамики: произведение массы элемента на его ускорение равно сумме приложенных сил (результатирующей силе) — дает

$$\rho dV \frac{Dw}{dt} = \rho g dV - \text{grad } p dV + \mu \Delta w dV$$

или после деления на ρdV и подстановки вместо Dw/dt его значения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \nabla w = g - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta w. \quad (4-10)$$

Полученное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости называется уравнением Навье — Стокса. Его интеграл в общем виде не может быть получен, поэтому все практически встречающиеся движения жидкости группируются по классам, в каждом из которых преобладающую роль играют какие-либо определенные силы, например силы вязкости (ползучее движение) или силы инерции (идеальная жидкость). При таком подходе удастся установить существенные закономерности того или иного типа движения и затем сделать поправки, подсказанные опытом.

Важнейшим частным случаем уравнения Навье — Стокса является уравнение невязкой несжимаемой (т. е. идеальной) жидкости, которое называется уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \nabla w = g - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4-11)$$

Как видим, из уравнения Эйлера исключены силы трения, вызываемые вязкостью, что не дает возможности при его решении

определить сопротивление движущейся жидкости. Однако решение уравнения идеальной жидкости позволяет получить важнейшие данные о закономерностях самого движения. Действие же сил вязкости (или внутреннего трения) может быть учтено дополнительно на основе данных эксперимента.

В проекции на координатные оси уравнение Эйлера имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4-12)$$

Как видно, в этих трех уравнениях содержится четыре неизвестных величины u , v , w и p . Следовательно, для решения системы недостает еще одного уравнения. Такое уравнение дает закон сохранения массы: *из каждого произвольного объема, заполненного жидкостью, может вытечь лишь столько жидкости, сколько в этот объем втекает, если рассматриваемый объем не содержит источников*, т. е. в поле без источников

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}}{V} = \operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4-13)$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности или сплошности. Для установившегося движения уравнение неразрывности целесообразно сформулировать применительно к трубке тока, которая в этом случае ведет себя как неподвижная труба: *количество жидкости, протекающее через любое поперечное сечение данной трубки тока, есть величина неизменная*. Следовательно, для разных сечений трубки тока (или вообще всякого неподвижного канала) будем иметь:

$$w_1 s_1 = w_2 s_2 = Q = \text{const}. \quad (4-14)$$

Величина Q , равная объемному количеству жидкости, протекающему в единицу времени через поперечное сечение канала, носит название *объемного расхода* или просто *расхода*. Присоединение уравнения неразрывности к уравнению Эйлера делает полученную систему принципиально разрешимой.

4-7. Интеграл уравнения Эйлера вдоль линии тока. Уравнение Бернулли

В электрических машинах режим циркуляции охлаждающих сред устанавливают до того, как производят нагружение самой электрической машины. Это позволяет рассматривать поле скоростей охлаждающей среды как поле стационарное. Иными словами, в уравнении Эйлера обращается в ноль первый член dw/dt , характеризующий локальное изменение скорости в точке поля в зависимости от времени. Тогда уравнение приобретает вид:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4-15)$$

Рассмотрим линейный интеграл этого уравнения вдоль линии тока:

$$\int_L \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} - \int_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} + C.$$

Учтем, что центральная сила \mathbf{g} имеет потенциал

$$\mathbf{g} = -\text{grad } u.$$

Тогда получим:

$$\int_L \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} - \int_L \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{r} + C.$$

Заметим, что вообще для всякой величины φ действительно соотношение:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} &= \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot (i dx + j dy + k dz) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi, \end{aligned}$$

т. е. скалярное произведение вектора градиента какой-либо величины на дифференциал радиуса-вектора поля есть полный дифференциал рассматриваемой величиной. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} &= \int_L du = u + C'; \\ \int_L \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{\rho} \int_L dp = \frac{1}{\rho} p + C''. \end{aligned}$$

Кроме того, подынтегральное выражение в левой части уравнения Эйлера преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{w} = d \frac{w^2}{2},$$

откуда

$$\int_L \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_L d \frac{\mathbf{w}^2}{2} = \frac{\mathbf{w}^2}{2} + C'''.$$

Тогда для интеграла уравнения Эйлера получим:

$$\frac{\mathbf{w}^2}{2} = u - \frac{1}{\rho} p + C. \quad (4-16)$$

Чтобы проинтегрировать уравнение Эйлера, мы заменили вектор силы тяжести \mathbf{g} его выражением через потенциал этой силы u . Теперь в полученном выражении (4-16) можно потенциал силы тяжести u выразить через высоту уровня в рассматриваемом поле, исходя из выражения для потенциала с учетом направления оси z :

$$g_z = -\frac{\partial u}{\partial z}; \quad gz = u + C_u, \quad \text{т. е. } u = C_u - gz.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (4-17)$$

Полученное уравнение называется уравнением Бернулли. Оно имеет важнейшее значение для понимания и расчета движения жидкостей в трубах и каналах. Каждому члену уравнения Бернулли придается конкретный физический смысл, для раскрытия которого удобно переписать уравнение в единицах длины. Для этой цели разделим его на ускорение силы тяжести g . Получим:

$$\frac{\mathbf{w}^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \quad (4-18)$$

Величину $\mathbf{w}^2/2g$ можно понимать как высоту, падая с которой под действием силы тяжести частица жидкости приобрела бы в конце пути скорость \mathbf{w} . Она называется скоростной высотой. Величину p/γ можно понимать как высоту столба жидкости, которую способно поддерживать давление p . Она называется высотой давления или пьезометрической высотой. (Не следует думать, что p есть давление столба жидкости; p есть абсолютное давление в элементарном объеме движущейся жидкости и лишь его количественным эквивалентом может служить высота столба, которую оно способно уравновесить, преодолевая силу тяжести). Величина z есть высота рассматриваемой точки линии тока над начальной поверхностью уровня. Она называется высотой места. Итак, уравнение Бернулли может быть сформулировано следующим образом:
при установившемся движении несжимаемой идеальной жидкости под действием сил, имеющих потенциал, сумма высот:

скоростной, пьезометрической и высоты места — есть величина для данной линии тока постоянная.

При изучении движения жидкости часто бывает важно выразить не изменение абсолютного давления в струе, а лишь изменение давления, связанного с самим движением. Иными словами, бывает целесообразно исключить из рассмотрения действие поля сил тяжести, которое одно только бы и существовало в отсутствие движения. Это означает, что из уравнения движения (Эйлера) и его интеграла (Бернулли) нужно исключить силу тяжести, представив абсолютное давление p как сумму давления, которое существовало бы в данной точке в отсутствие движения, и давления, вызванного движением.

Покажем, что из уравнения Бернулли при определенных допущениях может быть исключена высота места (т. е. энергия поля сил тяжести) и дадим этому факту подробное физическое истолкование. Будем считать, как и прежде, что плотность среды постоянна.

Разложим абсолютное давление p на две составляющие:

$$p = \bar{p} + p^*, \quad (4-19)$$

где \bar{p} — давление сил тяжести, или то давление, которое было бы в рассматриваемой точке поля в состоянии покоя; p^* — давление, созданное движением, т. е. прочими силами уравнения Эйлера.

Так как давление сил тяжести нам известно и равно $\bar{p} = C - \gamma z$, то

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{\bar{p}}{\gamma} + \frac{p^*}{\gamma} = \frac{C}{\gamma} - z + \frac{p^*}{\gamma},$$

откуда

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \frac{w^2}{2g} + \frac{p^*}{\gamma} = \text{const.}$$

Таким образом, для разности абсолютного давления и давления силы тяжести, т. е. для величины p^* , получили особенно простую и наиболее часто употребляемую форму уравнения Бернулли

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{p^*}{\gamma} = \text{const.} \quad (4-20)$$

Эта форма уравнения показывает, что если плотность жидкости неизменна, то при неизменной скорости движения и при изменении уровня рассматриваемой точки линии тока давление в движущейся струе не изменяется.* Иными словами, работа против сил тяжести не производится. Это объясняется тем, что при постоянной плотности жидкости сила тяжести частицы на любой глубине уравновешивается подъемной силой, приложен-

* Изменяется лишь абсолютное давление, причем ровно настолько, насколько оно изменилось бы для рассматриваемой точки в состоянии покоя.

ной к этой же частице со стороны окружающей жидкости. Однако последнее утверждение справедливо лишь до тех пор, пока наблюдаемая частица жидкости со всех сторон окружена другими частицами этой же жидкости. В других случаях, например на свободной поверхности воды, находящейся под атмосферным давлением, или на границе слияния двух жидкостей, сила тяжести ни в коем случае не может быть исключена из рассмотрения. Добавим еще, что при анализе движения газов в трубах, имеющих значительную высоту над уровнем нагнетателя, также необходимо рассматривать абсолютное давление p .

Если члены уравнения (4-20) умножить на ρg , получим:

$$\frac{\rho}{2} \omega^2 + p^* = \text{const.} \quad (4-21)$$

Величина $p_{\text{дин}} = \frac{\rho}{2} \omega^2$ называется динамическим давлением, величина $p_{\text{ст}} = p^*$ называется статическим давлением, их сумма

$$p_{\text{полн}} = p_{\text{дин}} + p_{\text{ст}} = \text{const} \quad (4-22)$$

называется полным давлением. Таким образом: *полное давление движущейся несжимаемой идеальной жидкости, равное сумме динамического и статического давления, есть величина постоянная.*

Особенно важно подчеркнуть, что термин «статическое давление» плохо отражает существо дела и поэтому не может быть признан удачным [54]. В самом деле, в состоянии покоя $p_{\text{ст}}$, поскольку из него исключено давление силы тяжести, всегда равно нулю. Это означает, что давление $p_{\text{ст}}$ есть результат движения, т. е. является динамической характеристикой струи. Это понятно и из других физических соображений. Поскольку сумма $\frac{\rho}{2} \omega^2 + p_{\text{ст}}$ есть величина постоянная, то чем больше скорость, тем меньше $p_{\text{ст}}$ и наоборот.

Разумеется, нет особой необходимости отменять терминологию, сложившуюся исторически.* Однако, во избежание возможных недоразумений, примеры которых известны из практики, следует отчетливо понимать, что в состоянии покоя давление в точке определяется исключительно действием сил тяжести. В состоянии же движения к этому давлению прибавляется сумма $p_{\text{дин}} + p_{\text{ст}} = p_{\text{полн}}$, для несжимаемых и лишенных свободных поверхностей жидкостей полностью характеризующая движение струи.

В заключение полезно подчеркнуть, что градиент давления $\text{grad } p$, который имеет размерность удельного веса, есть сила, отнесенная к единице объема жидкости. Само же давление p ,

* Л. Прандтль назвал величину p^* кинетическим давлением.

$кгс/м^2$ (или $кгс.м/м^3$), выражает энергию единицы объема жидкости. Поэтому произведение давления на расход (т. е. на секундный объем) определяет мощность жидкости, совершающей работу $pQ = N$, $кгс.м/сек$.

Глава пятая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

5-1. Вводные замечания

Выше было сказано, что уравнение Навье — Стокса для реальной, т. е. вязкой, жидкости может быть проинтегрировано лишь для простейших движений. В то же время неучет вязкости при решении уравнения идеальной жидкости (Эйлера) не позволяет ничего сказать о величине сопротивления при движении.

Сложившаяся ситуация побудила инженеров, занятых вначале гидравликой и впоследствии прикладной аэромеханикой, изыскивать эмпирические законы сопротивления. К настоящему времени накоплен богатейший материал по исследованиям сопротивления жидкостей и газов в самых разнообразных условиях, в том числе в условиях движения в каналах электрических машин. Полученные из опыта зависимости позволяют с большой степенью достоверности производить расчет весьма сложных машин и аппаратов.

Может показаться, что несоответствие сведений из инженерной практики выводам гидромеханики идеальной жидкости, с одной стороны, и невозможность теоретического определения величины сопротивления вязких жидкостей, с другой стороны, позволяют вообще отвлечься от теоретических представлений и пользоваться при необходимости лишь эмпирическими результатами.

Следует сразу же подчеркнуть, что такой вывод глубоко ошибочен. Все развитие гидродинамики, как в ее принципиальной, чисто теоретической сфере, так и в приложениях, доказывает, что оба направления фундаментальным образом воздействуют друг на друга. Важнейшие закономерности сопротивления движущихся сред не могли бы быть установлены на том уровне обобщения, который им присущ, если бы вся методология проведения экспериментов и анализа полученных результатов не была построена на прочном фундаменте глубоко разработанной теории. Ниже будет (правда, весьма лаконично) показано, как именно теоретические предпосылки, прямо вытекающие из анализа уравнений движения, дали мощный толчок развитию прикладной аэромеханики, что в свою очередь позволило существенно обогатить теорию.

Для изучения сопротивления жидкости необходимо правильно понимать природу этого сопротивления. В свою очередь, правильное понимание механизма сопротивления возможно только на базе анализа основных уравнений движения вязкой жидкости.

5-2. Гидромеханическое подобие течений

Практическая неразрешимость уравнений движения для многих важных конкретных форм течения жидкостей привела к обширным экспериментальным поискам законов сопротивления. При этом оказалось, что результаты даже наиболее тщательно поставленного в лаборатории эксперимента не могут быть распространены на натурные объекты, если не соблюдены некоторые специальные условия, которые обеспечивают гидромеханическое подобие модельной и натурной установок.

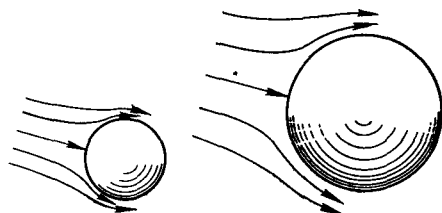


Рис. 5-1. Гидромеханическое подобие для шара

В частности, было установлено, что фактор геометрического подобия двух обтекаемых тел еще не означает подобия механического, так как при этом не обеспечено подобие поля скоростей и давлений в соответственных точках пространства.

Пусть, например, изучается течение жидкости вокруг шара столь большого объема, что эксперимент возможен практически лишь на модельной установке значительно меньших размеров (рис. 5-1). Два шара всегда геометрически подобны. Как очевидно, для осуществления механического подобия необходимо, чтобы отношение всех действующих сил в соответственных точках пространства было величиной неизменной. Можно еще сказать, что отношение сил, действующих на элемент объема жидкости в подобных точках пространства, должно быть постоянно для любого момента времени.

Как мы видели выше, на произвольный элемент объема жидкости или газа действуют в общем случае силы тяжести, силы объемной деформации (сжимаемости), силы инерции и силы трения.

В подавляющем большинстве типов движения жидкостей рассмотрение сил тяжести и объемной деформации лишено практического смысла. В самом деле, если жидкость несжимаема и не имеет свободных поверхностей (поверхностей раздела с другими жидкими средами), то в связи с тем, что сила тяжести в каждой точке объема компенсируется статической подъемной силой, движение жидкости оказывается вполне строго не зависящим от поля гидростатического давления, т. е.

от силы тяжести. В этих случаях сила тяжести может быть исключена из уравнений движения без нарушения общности решений.

Несжимаемость капельных жидкостей в инженерной практике обеспечивается практически во всех случаях; несжимаемость газов обеспечивается, если их скорость не приближается к скорости звука. Последнее требование в электромашиностроении также удовлетворяется. Таким образом, мы можем пренебречь как силами сжимаемости, так и силами тяжести.

Следовательно, гидромеханическое подобие течений вокруг геометрически подобных тел будет соблюдено в тех случаях, когда отношение сил инерции к силам трения в соответственных точках пространства будет одинаковым в любой момент времени.

Посмотрим теперь, какой формальный критерий гидромеханического подобия течений может быть получен при реализации сделанного утверждения.

Сила инерции на единицу объема есть произведение массы на единицу объема (т. е. плотности) на ускорение.

Компонент ускорения элемента объема, движущегося в направлении оси Ox , равен (см. § 4-3) $u \frac{du}{dx}$. Другие компоненты можно не рассматривать, так как это ничего не добавит к анализу условий подобия. Таким образом, компонент силы инерции имеет вид $\rho u \frac{du}{dx}$.

Компонент силы трения на единицу объема элемента, движущегося в направлении оси Ox (см. § 4-4), равен $\mu \frac{d^2u}{dy^2}$.

Отсюда отношение силы инерции к силе трения

$$\bar{f} = \frac{\rho u \frac{du}{dx}}{\mu \frac{d^2u}{dy^2}}.$$

Требуется определить, как полученное отношение зависит от входящих в него параметров, т. е. от скорости, размеров тела, плотности и вязкости.

Будем считать, что скорость u и разность скоростей du для каждого из подобных течений пропорциональны скорости данного течения в невозмущенной части потока w_∞ (скорости на бесконечности), т. е.

$$u \sim w_\infty \quad \text{и} \quad du \sim w_\infty.$$

Разности координат двух подобно расположенных точек пространства пропорциональны соответственным геометрическим размерам подобных тел (например, радиусам шаров), т. е.

$$dx \sim r. \quad \text{Отсюда} \quad \frac{du}{dx} \sim \frac{w_\infty}{r}.$$

Теперь сила инерции, выраженная в пропорциях, будет иметь вид: $\rho u \frac{du}{dx} \sim \frac{\rho \omega_\infty^2}{r}$. Сила трения равна $\mu \frac{d^2u}{dy^2} \sim \frac{\mu \omega_\infty}{r^2}$. Следовательно, отношение обеих сил составит:

$$\bar{f} = \frac{\rho u \frac{du}{dx}}{\mu \frac{d^2u}{dy^2}} \sim \frac{\rho \frac{\omega_\infty^2}{r}}{\mu \frac{\omega_\infty}{r^2}} = \frac{\rho}{\mu} \omega_\infty r = \frac{\omega_\infty r}{\nu}, \quad (5-1)$$

т. е. для гидромеханического подобия течений вокруг геометрически подобных тел необходимо, чтобы для каждого из течений критерий подобия $\omega_\infty r/\nu$ имел одно и то же значение в любой момент времени. В указанном критерии ω_∞ есть скорость в характерной точке пространства, r — характерный геометрический размер исследуемого тела.

Поскольку критерий подобия получен как отношение сил, следует ожидать, что его размерность равна единице. Это можно проверить непосредственно:

$$\left[\frac{\rho}{\mu} \omega r \right] = \frac{M}{L^3} \frac{LT}{M} \frac{L}{T} L = 1.$$

Выведенный здесь закон гидромеханического подобия, оказавший огромное влияние на все последующее развитие гидродинамики, был открыт и сформулирован О. Рейнольдсом, в честь которого введенный им критерий обозначается первыми двумя буквами его фамилии $\omega r/\nu = \text{Re}$.

Ввиду чрезвычайной важности методов определения критериев и большого значения критерия Рейнольдса, получим его еще двумя способами.

Прежде всего покажем, что число Рейнольдса может быть выведено непосредственно из уравнения Навье — Стокса, т. е. уравнения движения вязкой жидкости. Для этого запишем уравнение в безразмерном виде и потребуем, чтобы оно было тождественно для всех подобных течений. Это требование означает, что у подобных движений должны быть тождественны решения дифференциальных уравнений относительно безразмерных переменных.

Следовательно, если в безразмерной форме уравнения движения какой-либо множитель или какие-либо множители будут отличать уравнение от его размерной формы, то условием подобия течений естественно окажется неизменность этих множителей. Иными словами, указанные множители как раз и являются критериями гидромеханического подобия. Сказанное станет яснее из последующих преобразований.

Возьмем уравнение Навье — Стокса применительно к несжимаемой жидкости без свободных поверхностей. Тогда в нем

p — не абсолютное давление, а разность между абсолютным и гидростатическим давлением. Получим:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{w}.$$

Введем в качестве независимых единиц измерения: 1) скорость в невозмущенной точке для каждого данного течения \mathbf{w} ; 2) характерную для каждого тела длину r ; 3) давление в невозмущенной точке p ; 4) время t .

Тогда безразмерными значениями этих величин для каждого течения будут:

$$\mathbf{w}^* = \frac{V}{\mathbf{w}}; \quad l^* = \frac{L}{r}; \quad p^* = \frac{P}{p}; \quad t^* = \frac{T}{t},$$

где V — скорость, измеренная в новых единицах, т. е. в единицах скорости; L — измеренная длина; P — измеренное давление; T — измеренное время.

Выразим теперь дифференциальное уравнение через новые безразмерные переменные. Будем при этом иметь в виду, что символ grad означает однократное дифференцирование по месту, т. е. должен быть домножен на $1/r$, и символ Δ означает двукратное дифференцирование по месту, т. е. должен быть домножен на $1/r^2$. Тогда получим:

$$\frac{\mathbf{w}}{t} \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t} + \frac{\mathbf{w}^2}{r} \mathbf{w}^* \cdot \text{grad } \mathbf{w}^* = -\frac{1}{\rho} \frac{p}{r} \text{grad } p^* + \frac{\mu}{\rho} \frac{\mathbf{w}^*}{r^2} \Delta \mathbf{w}^*.$$

Поскольку единица скорости не является независимой от единицы длины, именно $\mathbf{w} = r/t$, то в первом члене уравнения следует заменить t его значением r/\mathbf{w} . Тогда этот член уравнения будет равен \mathbf{w}^2/r . Разделим теперь обе части уравнения на \mathbf{w}^2/r . Получим:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t} + \mathbf{w}^* \cdot \text{grad } \mathbf{w}^* = -\frac{p}{\rho \mathbf{w}^2} \text{grad } p^* + \frac{\nu}{\mathbf{w}r} \Delta \mathbf{w}^*.$$

Как видим, полученное уравнение отличается от исходного двумя множителями в правой части. Но безразмерный множитель $p/\rho \mathbf{w}^2$, равный отношению статического давления в точке к двойной величине динамического давления, характеризует лишь напряженное состояние элемента объема жидкости (можно еще сказать: реакцию против изменения объема) и не имеет значения для механического подобия движений. Таким образом, остается лишь один множитель $\nu/\mathbf{w}r$, неизменность которого для всех изучаемых течений будет означать, что решения дифференциального уравнения, записанного в характеризующих каждое течение безразмерных единицах, тождественны, т. е. что сами течения подобны. Следовательно, мы вновь получили число Рейнольдса в качестве критерия гидромеханического подобия.

Получим теперь число Рейнольдса еще одним способом, который также имеет принципиальное значение и будет нами впоследствии использован.

Рассмотрим в качестве примера движение охлаждающего газа в каналах ротора турбогенератора с диагональной системой вентиляции [64]. На рис. 5-2 схематически показана картина течения газа от точки входа из зазора машины в канал до точки выхода обратно в зазор. Движение это достаточно сложно в особенности потому, что сопровождается интенсивным нагреванием газа в канале.

Получить формулу для расчета сопротивления теоретическим путем, не делая при этом нежелательных упрощений, чрезвычайно затруднительно. В то же время развитие конструкций требует определенности при проектных расчетах вентиляции. Это означает, что надежность использования результатов модельных исследований при проектировании натуральных объектов должна быть высокой. В свою очередь, отсюда вытекает необходимость при проведении эксперимента учитывать все факторы, определяющие подобие течений в модели и натурной машине.

Для получения критериев подобия может быть применен весьма простой прием, основанный на анализе размерностей. Так как все физические законы могут быть представлены в безразмерной форме, т. е. форме, освобожденной от единиц измерения, то соображения о подобии могут быть заменены соображениями о размерностях.

Пусть в рассматриваемом примере сопротивление (потери давления) вращающегося канала Δp зависит от следующих величин: окружной скорости ротора в зоне входа газа в каналы u , скорости газа в канале v , высоты заборника канала h , вязкости газа ν , его удельного веса γ и шага по пазам, т. е. тангенциального расстояния от одного входа до другого, δ :

$$\Delta p = \varphi(u, v, h, \nu, \gamma, \delta).$$

Опыт работы с построенными машинами показывает, что все другие факторы в данном случае мало существенны.

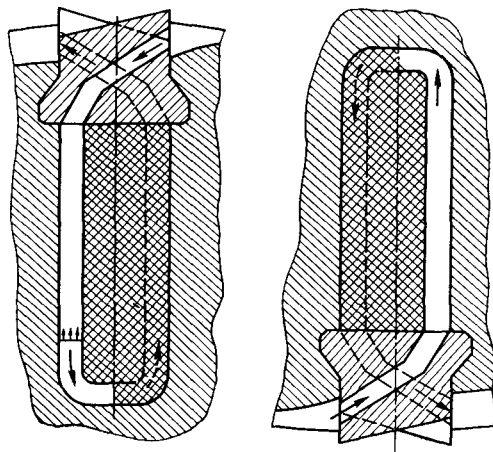


Рис. 5-2. Схема движения газа в диагональной системе вентиляции ротора турбогенератора

рес, хотя она и противоречит другим экспериментальным данным.

Ньютон исходил из представления дискретной, состоящей из мельчайших частиц среды. Частицы не взаимодействуют друг с другом и при встрече с движущимся в жидкости телом приобретают некоторый импульс. Таким образом, для применения теоремы количества движения нужно учесть все частицы, приходящие в соприкосновение с телом. Если плотность среды есть ρ и площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, равна s , то при скорости ω равномерного прямолинейного движения тела относительно жидкости или, что то же самое, жидкости относительно неподвижного тела масса жидкости, с которой за единицу времени приходит в соприкосновение тело, равна $\rho s \omega$. Этой массе сообщается скорость, которую можно принять пропорциональной скорости относительного движения тела $\omega_T = k\omega$. Следовательно, сопротивление тела, т. е. сила, равная импульсу, сообщаемому жидкости в единицу времени, выражается формулой:

$$F = \rho s \omega k \omega = k \rho s \omega^2. \quad (5-2)$$

Таким образом, сопротивление пропорционально плотности среды, площади тела и квадрату относительной скорости.

Если исходить из полученной формулы, сопротивление может быть определено следующим образом. Для какой-либо модели экспериментально определяется коэффициент пропорциональности k . Затем найденная величина этого коэффициента подставляется в формулу Ньютона для расчета сопротивления любого геометрически подобного тела, для которого должна быть известна лишь величина проекции s .

Опыт говорит, однако, о том, что рассчитанные таким способом коэффициенты сопротивления во многих случаях не соответствуют действительным значениям. Так, например, коэффициент сопротивления квадратной пластинки, расположенной перпендикулярно направлению движения, по формуле Ньютона равен единице. Экспериментальное значение коэффициента в этом случае равно 0,55. Формула (5-2) дает также завышенные значения сопротивления для хорошо обтекаемых тел, например, тел сигарообразной формы.

5-4. Природа сопротивления жидкостей

Анализ причин несостоятельности гипотезы Ньютона позволяет глубже проникнуть в проблему сопротивления жидкости и подойти к современному пониманию ее существа.

По гипотезе Ньютона на величину сопротивления влияют только те явления, которые происходят с передней стороны тела, но не с боковых сторон и не с задней. Таким образом, форма тела и величина его поверхности оказались вне рас-

смотрения. Между тем именно форма тела (при неизменной величине проекции s) во многих случаях играет решающую роль при формировании величины сопротивления. Это же можно сказать в некоторых других случаях о поверхности тела, т. е. поверхности трения. Зачастую важную роль играют и форма и поверхность тела.

Концепция несплошной среды, частицы которой не взаимодействуют друг с другом, приводит к необходимости предполагать, что, получив импульс от движущегося тела, данная частица не способна в какой-либо мере передать этот импульс другим частицам. Между тем на движение каждой частицы оказывают влияние соседние с ней частицы, причем жидкость ведет себя как практически сплошная среда, т. е. в движение приходят сразу большие группы частиц (молекул).

Гипотеза Ньютона не позволяет учесть влияние вязкости, т. е. касательных напряжений внутри самой жидкости. Между тем именно проявление вязкости коренным образом изменяет форму движения жидкости по сравнению с той, которая была бы в случае движения идеальной невязкой жидкости.

Следовательно, коэффициент сопротивления может считаться неизменным и использоваться для пересчета только для тех тел, у которых оказываются подобными их геометрическая форма, их расположение по отношению к потоку жидкости и величина их поверхности, иными словами, для которых соблюдено гидромеханическое подобие.

Рассмотрим жидкость без свободных поверхностей. Будем считать ее несжимаемой, имеющей во всем объеме неизменную плотность ρ . Это позволяет считать, что сила тяжести любой частицы жидкости уравнивается подъемной силой со стороны окружающих частиц (см. § 4-5), и исключить из уравнения Навье — Стокса силу тяжести. Тогда будем иметь:

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{w}. \quad (5-3)$$

Отсюда следует, что если рассматривать не абсолютное давление в потоке, а разность между ним и давлением покоя в этой же точке поля, т. е. если рассматривать только разность давлений, обусловленную движением несжимаемой жидкости, то силы инерции $D\mathbf{w}/dt$ уравниваются силами нормального давления ($\text{grad } p$) и силами вязкости ($\nu \Delta \mathbf{w}$).

Поскольку в такой общности уравнение (5-3) не может быть проинтегрировано, естественно возникает вопрос о количественном соотношении членов этого уравнения. Выше мы видели (§ 5-2), что отношение сил инерции к силам вязкости вполне определяется одним безразмерным комплексом, или критерием, именно числом Рейнольдса $Re = \omega r / \nu$. Казалось бы, правомочным для движений, у которых число Рейнольдса достаточно велико, отвлечься от действия вязкости, пренебрегая по-

следним членом уравнения (5-3), т. е. интегрируя его для идеальной жидкости без трения, как это и сделано в § 4-7. В самом деле, при движении, например, шара с радиусом 5 см в воде со скоростью 1 м/сек число Рейнольдса равно 50 000. Следовательно, силы инерции относятся к силам вязкости, как 50 000 к 1. В обычной практике вычислений подобные соотношения служат достаточным основанием для пренебрежения меньшими величинами по сравнению с большими. В разобранном примере можно было бы считать, что сопротивление определяется только силами инерции. Однако такой подход привел бы к результату, известному под названием «парадокс Даламбера»: сумма сил давления равна нулю, т. е. двигаясь в воде, шар вообще не испытывает сопротивления.

Что же препятствует возможности пренебрегать действием сил вязкости? Следует иметь в виду по крайней мере два физических результата наличия в жидкости даже весьма небольших по величине сил вязкости.

Во-первых, изменяется поле давлений, в особенности за обтекаемым телом. Линии тока у действительной жидкости в отличие от жидкости идеальной не являются непрерывными, т. е. не прилегают к обтекаемому телу по всей его поверхности. В кормовой части тела возникает разрыв линий тока, образование вихрей и зоны (иногда ее называют «мертвой зоной») с меньшим давлением. Таким образом возникает градиент давления, препятствующий движению, или сопротивление давления. Как очевидно, сопротивление давления тем меньше, чем более обтекаемую форму имеет движущееся тело. Например, тонкая пластинка, движущаяся в своей плоскости, практически не имеет сопротивления давления (линии тока практически не искажаются). Однако эта же пластинка, поставленная перпендикулярно к направлению движения, обладает весьма значительным сопротивлением давления (рис. 5-3).

Другим результатом действия сил вязкости является наличие вблизи тела градиента скорости $\frac{\partial w}{\partial n}$ (в направлении нормали к поверхности тела) столь значительного, что даже очень малая вязкость дает ощутимую величину касательного напряжения $\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$.

В самом деле, пусть, например, рассматривается движение воды в трубе. Типичная эпюра скоростей для такого движения приведена на рис. 5-4. Как видно, основная масса воды дви-

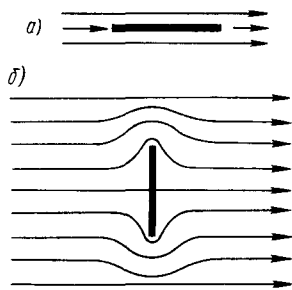


Рис. 5-3. Обтекание пластины: а — ориентированной по потоку; б — ориентированной перпендикулярно потоку

жется относительно стенок трубы с примерно одинаковой скоростью почти по всему сечению трубы. Если бы жидкость была идеальной и не обладала трением, скорость частиц воды на поверхности стенок также была бы большой. Опыт говорит, однако, о том, что частицы жидкости на поверхности совсем не движутся, т. е. как бы прилипают к стенке. Следовательно, в тонком пристеночном слое происходит резкое изменение скорости, которое характеризуется величиной градиента $\frac{\partial w}{\partial r}$ (r —

радиус трубы). Указанный тонкий пристеночный слой называется пограничным слоем, а сопротивление, вызываемое касательными напряжениями трения, называется сопротивлением трения. Таким образом, хотя по всей массе маловязкой жидкости, удаленной от поверхностей обтекаемых тел, силы инерции несомненно преобладают над силами вязкости и последние могут не учитываться, у самих обтекаемых поверхностей такое допущение несостоятельно, т. е. должно быть учтено сопротивление трения.

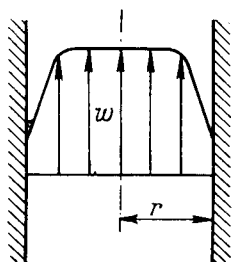


Рис. 5-4. Распределение скоростей при движении жидкости в трубе

В приведенном выше примере с тонкой пластинкой сопротивление трения больше всего в том именно случае, когда минимально сопротивление давления, т. е. когда пластинка движется в своей плоскости (рис. 5-3, а). При расположении перпендикулярно к потоку сопротивление трения пренебрежимо мало (рис. 5-3, б). В общем случае оба вида сопротивления* могут быть одного порядка, однако одно из них больше определяется формой тела, другое величиной поверхности.

Для экспериментального определения обеих составляющих сопротивления измеряют полное сопротивление и распределение давления по всей поверхности тела, которое позволяет вычислить сопротивление давления. Затем из полного сопротивления вычитают сопротивление давления и полученную разность относят целиком к сопротивлению трения.

Если разложить все силы, которые действуют со стороны жидкости на тело, на их нормальные и касательные компоненты, то составляющие этих сил, направленные против движения, как раз и дадут соответственно сопротивление давления и сопротивление трения.

* Сопротивления деформации, волновое, кавитации, теплопроводности и капиллярности, которые проявляются в специфических формах движения, здесь не учитываются.

5-5. Обобщение уравнения Бернулли на случай движения жидкости с трением

Предыдущий анализ показывает, что полное сопротивление жидкости зависит от формы тела и его положения в потоке, от размеров тела, от свойств жидкости (плотности, вязкости) и скорости ее движения. Поэтому закон сопротивления в необходимой общности пока еще не может быть сформулирован, что выражается формально в невозможности получить общий интеграл уравнения Навье — Стокса. Возникает необходимость использовать приближенные решения этого уравнения, внося в них поправки, подсказанные экспериментом.

Наиболее плодотворный результат, в особенности важный в инженерных приложениях, дает такой подход к проблеме, при котором в качестве приближенного уравнения Навье — Стокса (вязкой жидкости) принимается уравнение Эйлера (идеальной жидкости), т. е. в качестве приближенного решения рассматривается уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho}{2} \omega^2 + p_{ст} = \text{const.}$$

Чтобы внести в это решение поправку на сопротивление жидкости, следует учесть разность давлений Δp (этого требует размерность членов уравнения Бернулли), которая соответствует величине сопротивления F . Такой метод больше всего нагляден в применении к движению жидкостей в каналах и трубах, что и представляет наибольший интерес в теории электрических машин.

Уже в гипотезе Ньютона сопротивление принято пропорциональным квадрату скорости движения: $\omega = k\rho s\omega^2$. Проведенный выше анализ предпосылок и результатов этой гипотезы показал ее несостоятельность, если применять гипотезу в том именно виде, какой придал ей сам Ньютон. Если, однако, предположить, что при такой же форме записи зависимость сопротивления от всех влияющих факторов должна быть учтена в величине коэффициента k , то для падения давления, вызванного сопротивлением, получим:

$$\Delta p = \frac{F}{s} = k\rho\omega^2. \quad (5-4)$$

Такой подход удобен не только с точки зрения сохранения исторически сложившихся и справедливых в отдельных случаях формул, но и с позиций внесения поправки в уравнение Бернулли. Правда, в этом смысле коэффициент k удобнее взять таким, чтобы падение давления Δp выражалось в долях дина-

мического давления $\frac{\rho}{2} \omega^2$. Поэтому договорились поправку на сопротивления представлять в виде

$$\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} \omega^2, \quad (5-5)$$

причем коэффициент ξ , равный, как очевидно, $2k$, называют коэффициентом сопротивления.

Рассмотрим теперь факторы, от которых зависит коэффициент сопротивления. Как мы выяснили, результаты, полученные при экспериментах с одной жидкостью, могут быть распространены на любую другую жидкость при соблюдении определенных требований, а именно при соблюдении гидромеханического подобия. Гидромеханическое подобие соблюдается, если наряду с геометрическим подобием рассматриваемых тел равны безразмерные критерии или числа Рейнольдса $Re = \frac{\omega r}{\nu}$.

Таким образом, форма поправки к уравнению Бернулли не будет противоречить современным представлениям о природе сопротивления жидкостей, если ей придать вид:

$$\Delta p = \xi (Re) \frac{\rho}{2} \omega^2. \quad (5-6)$$

5-6. Физический смысл уравнения Бернулли

Рассмотрим уравнение Бернулли применительно к движению газов и жидкостей в каналах и трубах систем охлаждения электрических машин (рис. 5-5). Будем называть обобщенным уравнением Бернулли выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \omega_1^2 + p_{ст 1} &= \frac{\rho}{2} \omega_2^2 + p_{ст 2} + \Delta p_{1,2} = \\ &= \frac{\rho}{2} \omega_n^2 + p_{ст n} + \sum_{n=1}^n \Delta p_n = p_{полн} = const, \end{aligned} \quad (5-7)$$

где $\Delta p_{1,2}$ — падение давления на пути от сечения канала I—I до сечения II—II, вызванное действием сопротивления жидкости или газа на этом участке.

Падения давления Δp_{1-2} ; Δp_{2-3} ; Δp_n , $n+1$ и т. д. называют часто потерями давления, имея в виду, что эти потери необратимо рассеиваются или, как говорят, диссипируют, не восстанавливаясь уже в форме кинетической или потенциальной энергии струи. Необратимые потери давления, т. е. потери энергии, не исчезают, разумеется, бесследно. Они выделяются в виде тепла и передаются в такой форме самой движущейся жидкости. Однако полное давление при движении с потерями имеет уже иной физический смысл по сравнению со своим аналогом в уравнении Бернулли для идеальной жидкости.

Для пояснения сказанного рассмотрим эпюру давлений при движении жидкости по каналу переменного сечения для двух

типов движения: без потерь давления (т. е. без сопротивления) и с потерями давления (рис. 5-6).

Учтем, что в соответствии с уравнением неразрывности для трубки тока (§ 4-6) расход жидкости, равный произведению скорости на сечение канала, есть величина неизменная $Q = \omega s = \text{const}$. Отсюда

$$\omega_1 = \frac{Q}{s_1}; \quad \omega_2 = \frac{Q}{s_2}; \quad \omega_3 = \frac{Q}{s_3}.$$

Эюра (рис. 5-6, а) для идеальной жидкости, полученная по уравнению Бернулли (4-2), содержит две составляющие полного давления. При этом динамическое давление определяется скоростью движения в данном месте канала, т. е. попросту сечением канала (будем считать, что расход среды Q задан и обеспечен каким-либо внешним источником). Следовательно, статическое давление в каждом месте струи есть разность полного и динамического давления, т. е. также определяется сечением канала и начальной величиной статического давления на входе в канал (можно сказать также: заданной величиной полного давления источника).

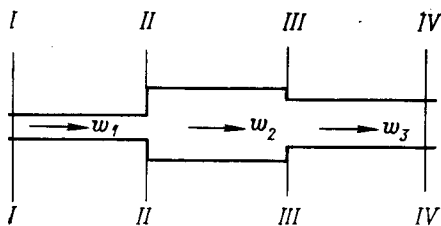


Рис. 5-5. К трактовке уравнения Бернулли

По-иному обстоит дело в случае движения с потерями. Эюра потерь давления построена на рис. 5-6, б в предположении, что на участках канала неизменного сечения действует только сопротивление трения, которое пропорционально поверхности трения, т. е. длине участка (наклонная прямая). При изменении сечения канала, т. е. при внезапном расширении или внезапном сужении проявляется сопротивление давления (его иногда называют сопротивлением формы), которое увеличивает потери давления. Вообще, потери давления при движении по каналу могут лишь возрастать, но не могут оставаться неизменными или тем более уменьшаться.

Поскольку полное давление струи на входе в канал есть величина заданная, эквивалентная полной энергии струи (давление есть работа на единицу веса или объема жидкости), то при увеличении потерь уменьшается статическое давление. В самом деле, динамическое давление определяется скоростью движения ω и зависит только от сечения канала и расхода жидкости, т. е. величин заданных. Поэтому необратимая убыль энергии струи осуществляется целиком за счет величины статического давления по сравнению с той, какая была бы в этой же точке канала при движении без потерь.

На этом примере иллюстрируется замечательная особенность жидкостей и газов, именно способность многократного преобразования одного вида энергии струи в другой в зависимости от формы канала, или, говоря более общо, в зависимости от величины скорости в данной точке скоростного поля. Всякое ускорение потока приводит к понижению давления в нем; замедление потока повышает давление в данном месте.

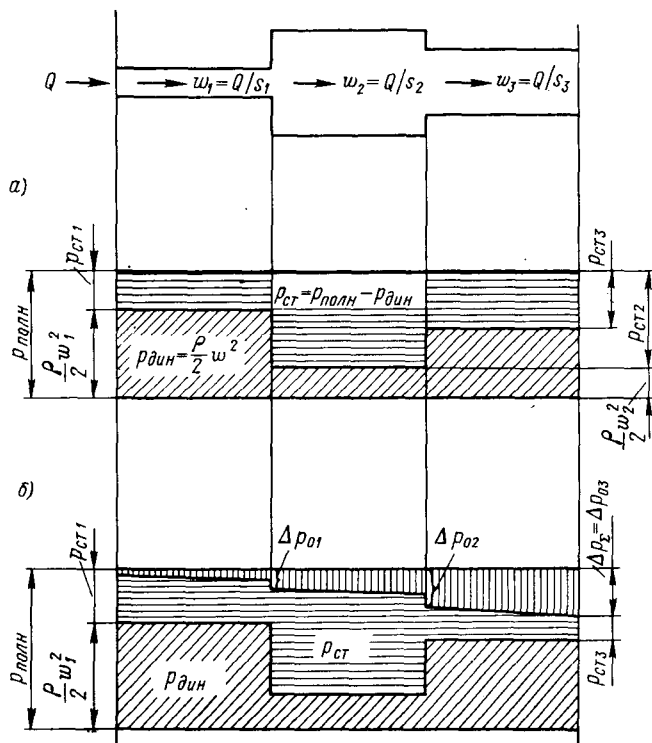


Рис. 5-6. Эпюры давлений для идеальной (а) и вязкой (б) жидкостей

Что касается потерь давления, то если считать, что полное давление есть величина заданная, то статическое давление в каком-либо месте уменьшится как раз на величину потерь от начала пути до этого места.

Читателя не должна, однако, смущать несколько иная формулировка этого же положения. Именно, можно сказать, что потери давления составляют убыль полного давления. В самом деле, будем считать, например, сечение выхода из канала, представленного на рис. 5-6, внешним источником расхода (и полного давления) для другого канала, который можно рассматривать как непрерывное продолжение первого. Тогда естественно

сумма динамического и статического давлений на выходе $p_{динз}$ и $p_{стз}$ представит полное давление на входе в новый канал, равное $p_{полн} - \Delta p_{\Sigma}$. Поскольку, однако, статическое давление на входе в новый канал $p_{ст1}$ при условии, что сечение нового входа равно сечению входа первого канала, окажется равным $p_{стз}$, т. е. будет равно $p_{ст1} - \Delta p_{\Sigma}$, то противоречия в обеих формулировках нет.

5-7. Пример применения уравнения Бернулли

Важным примером применения уравнения Бернулли является расчет распределения расходов (скоростей) охлаждающей среды по отдельным каналам системы охлаждения электрической машины.

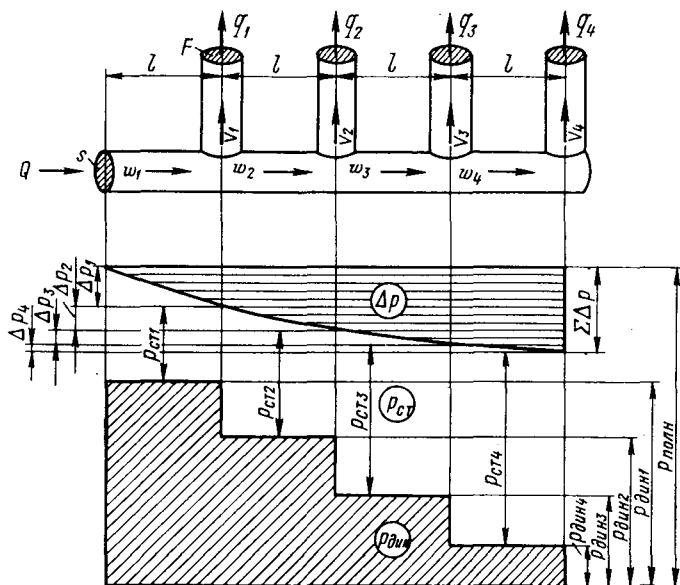


Рис. 5-7. Эпюра давлений в питающем канале системы распределения охлаждающей среды

Рассмотрим систему однотипных вентиляционных каналов, так называемых ответвлений, в которые охлаждающая среда поступает из одного общего, питающего канала (рис. 5-7). Ограничимся рассмотрением системы всего лишь с четырьмя ответвлениями. Определим характер изменения составляющих полного давления вдоль питающего канала, т. е. членов обобщенного уравнения Бернулли (5-7):

$$p + \frac{\rho}{2} w^2 + \Sigma \Delta p = p_{полн} = \text{const.}$$

Пусть расходы в ответвлениях равны q_1, q_2, q_3, q_4 . Тогда скорость в питающем канале будет изменяться следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{Q}{s} = \frac{1}{s} Q;$$

$$\omega_2 = \frac{Q - q_1}{s} = \frac{1}{s} (Q - q_1);$$

$$\omega_3 = \frac{Q - q_1 - q_2}{s} = \frac{1}{s} (Q - q_1 - q_2);$$

$$\omega_4 = \frac{Q - q_1 - q_2 - q_3}{s} = \frac{1}{s} (Q - q_1 - q_2 - q_3).$$

Отсюда динамическое давление в питающем канале уменьшается после каждого ответвления на величину, зависящую от ответвившегося расхода q_i :

$$p_{\text{дин } 1} = \frac{\rho}{2} \omega_1^2 = \frac{\rho}{2s^2} Q^2;$$

$$p_{\text{дин } 2} = \frac{\rho}{2} \omega_2^2 = \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1)^2;$$

$$p_{\text{дин } 3} = \frac{\rho}{2} \omega_3^2 = \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2)^2;$$

$$p_{\text{дин } 4} = \frac{\rho}{2} \omega_4^2 = \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2 - q_3)^2.$$

Определим теперь потери давления на каждом участке питающего канала между двумя соседними ответвлениями

$$\Delta p_1 = \xi \frac{\rho}{2} \omega_1^2 = \xi \frac{\rho}{2s^2} Q^2;$$

$$\Delta p_2 = \xi \frac{\rho}{2} \omega_2^2 = \xi \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1)^2;$$

$$\Delta p_3 = \xi \frac{\rho}{2} \omega_3^2 = \xi \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2)^2;$$

$$\Delta p_4 = \xi \frac{\rho}{2} \omega_4^2 = \xi \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2 - q_3)^2.$$

Здесь принято, что коэффициент сопротивления питающего канала не зависит от расхода.

Теперь на основании уравнения Бернулли может быть определено значение статического давления перед каждым ответвлением:

$$p_{ст 1} = p_{полн} - p_{дин 1} - \Delta p_1 = p_{полн} - \frac{\rho}{2s^2} Q^2 - \frac{\rho}{2s^2} \xi Q^2;$$

$$p_{ст 2} = p_{полн} - \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1)^2 - \frac{\rho}{2s^2} \xi [Q^2 + (Q - q_1)^2];$$

$$p_{ст 3} = p_{полн} - \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2)^2 - \frac{\rho}{2s^2} \xi [Q^2 + (Q - q_1 - q_2)^2];$$

$$p_{ст 4} = p_{полн} - \frac{\rho}{2s^2} (Q - q_1 - q_2 - q_3)^2 - \frac{\rho}{2s^2} \xi [Q^2 + (Q - q_1 - q_2 - q_3)^2];$$

Таким образом получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными расходами в ответвлениях. Поскольку уравнения, входящие в систему, нелинейны, ее решение затруднительно.

Если учесть, что системы распределения охлаждающих сред в электрических машинах содержат значительно больше четырех ответвлений, то сложность решения задачи в общей постановке станет очевидной. Ниже этой проблеме будет уделено специальное внимание (гл. 7), а сейчас обратимся вновь к иллюстрации уравнения Бернулли. Для этой цели откажемся пока от количественного анализа распределения и ограничимся анализом качественным.

Примем вначале для простоты, что потери давления в питающем канале равны нулю. Тогда сразу же оказывается, что статическое давление вдоль питающего канала возрастает, так как убывает динамическое. Уравнение Бернулли приобретает вид:

$$p_{ст 1} + \frac{\rho}{2} \omega_1^2 = p_{ст 2} + \frac{\rho}{2} \omega_2^2 = \text{const},$$

т. е.

$$p_{ст 2} = p_{ст 1} + \frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2);$$

$$p_{ст 3} = p_{ст 1} + \frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_3^2);$$

$$p_{ст 4} = p_{ст 1} + \frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_4^2).$$

Статическое давление в питающем канале есть избыточное давление по отношению к атмосферному, т. е. к внешней среде системы распределения. Следовательно, вдоль питающего канала все время происходит возрастание избыточного давления. Это, естественно, приводит к увеличению расхода в ответвлениях, если сопротивления самих ответвлений одинаковы $q_4 > q_3 > q_2 > q_1$. Такой результат, противоречащий интуитивному

представлению о течениях, носит наименование эффекта Бернулли.

Итак, расходы и скорости в ответвлениях возрастают по мере удаления от входа в питающий канал. Посмотрим теперь, может ли изменить данную ситуацию учет потерь давления Δp_i . Как очевидно, чтобы компенсировать эффект повышения статического давления, потери давления в питающем канале должны быть по крайней мере не меньше изменения динамического давления. Например, после первого ответвления должно быть

$$\xi \frac{\rho}{2} \omega_1^2 \geq \frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

Такой результат возможен либо при больших значениях коэффициента сопротивления ξ , либо при незначительных изменениях динамического давления, например при весьма малом сечении ответвлений по сравнению с сечением питающего канала.

Как видно из рис. 5-7, угол наклона кривой потерь давления на каждом участке разный, поскольку изменяется расход и в еще большей мере квадрат расхода. Изменения динамического давления при ответвлениях также различны, так как изменяются разности $(\omega_2^2 - \omega_1^2)$, $(\omega_3^2 - \omega_2^2)$ и т. д.

Более глубокий анализ явления позволит установить количественные соотношения между отдельными параметрами системы.

5-8. Измерение давлений

Для измерения давления в какой-либо точке жидкости или газа в эту точку необходимо ввести прибор, способный реагировать на изменение интересующей наблюдателя величины, например полного, статического или динамического давления. Однако при внесении в поле скоростей и давлений движущейся либо покоящейся жидкости постороннего предмета поле, вообще говоря, деформируется. Поэтому с принципиальной точки зрения давление, которое было в точке до введения в нее прибора, в точности измерено быть не может.

Для уменьшения ошибки измерения при исследовании покоящейся жидкости достаточно обеспечить сопоставимо малые геометрические размеры вносимого в жидкость зонда. Современные зонды для отбора давления столь невелики, что точность измерений в покоящейся жидкости практически всегда удовлетворительна.

Несколько сложнее обстоит дело, когда требуется измерить давление в движущейся жидкости. Если, например, измеряется статическое давление в точке, то, строго говоря, для создания ситуации, аналогичной стационарному состоянию жидкости, измерительный зонд для отбора давления должен был бы дви-

гаться вместе с жидкостью, при том со скоростью исследуемой точки. В противном случае, т. е. когда зонд неподвижен, а так и бывает чаще всего, относительное движение зонда и жидкости создает возмущение в потоке, которое может исказить результат измерения.

При использовании в качестве измерительного прибора манометра, в качестве зонда для отбора статического давления в точке служит иногда так называемый диск Сера, от которого давление передается к манометру при помощи жесткой трубки или гибкого непроницаемого шланга.

Чтобы уменьшить возмущение потока исследуемой жидкости диску Сера придают форму тонкой круглой пластинки, ориен-

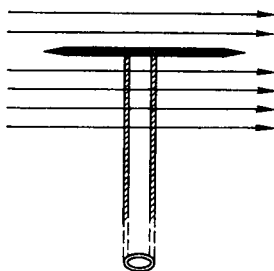


Рис. 5-8. Диск Сера

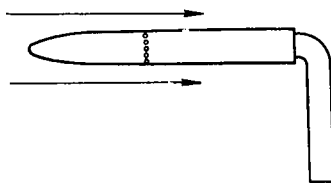


Рис. 5-9. Трубка для отбора статического давления

тируемой в направлении потока (рис. 5-8). В центре диска, где возмущение потока наименьшее, проколото отверстие, к которому приварена по возможности тонкая трубка круглого или овального сечения.

Конструкция диска Сера позволяет считать статическое давление в центральной точке пластинки весьма близким к тому, которое было до внесения диска в поток.

Однако пластинку необходимо располагать строго по направлению потока. Если пластинка окажется наклоненной к плоскости вектора скорости, динамическая составляющая полного давления окажет воздействие на центральную точку пластинки и исказит результат измерения.

Таким образом, диск Сера может применяться лишь в тех сравнительно немногочисленных случаях, когда предварительно изучено поле скоростей исследуемой жидкости и существует возможность ориентировать пластинку должным образом.

Менее чувствительным к направлению потока является зонд для отбора статического давления другой конструкции (рис. 5-9). В закрытой и закругленной на конце трубке просверливается на боковой поверхности ряд малых отверстий. Давление с другого конца трубки передается на прибор.

Поскольку все же зонд любой конструкции необходимо ориентировать по потоку, возникла мысль использовать в качестве зонда статического давления гибкий шланг, который был бы способен располагаться вдоль линий тока поля скоростей исследуемой жидкости (рис. 5-10). Именно такая конструкция зонда чаще всего применяется при проведении вентиляционных измерений в электрических машинах. Для этой цели весьма тонкая трубка (с внутренним диаметром порядка двух милли-

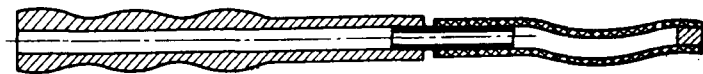


Рис. 5-10. Гибкий шланг для отбора статического давления

метров) из эластичной плотной резины присоединяется одним концом к металлической трубке, связанной с манометром. Другой конец резинового зонда заглушается, и на его боковой поверхности высверливается одно или несколько отверстий диаметром от полумиллиметра до миллиметра. Если скорость воз-

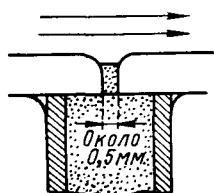


Рис. 5-11. Отбор статического давления у стенки канала

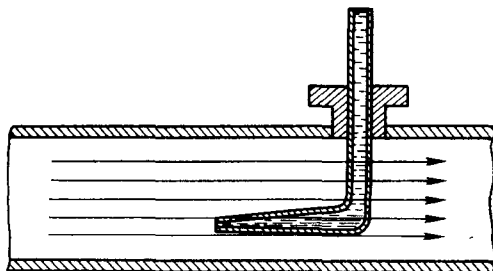


Рис. 5-12. Трубка для отбора полного давления

духа в исследуемой зоне электрической машины составляет 6 м/сек и более, эластичный зонд довольно хорошо ориентируется вдоль линий тока, и прибор в целом регистрирует весьма устойчивые во времени значения статического давления в точке.

Следует добавить, что для измерения статического давления в каком-либо удаленном от начала сечении длинного канала нет необходимости вводить в поток специальные зонды. Достаточно просверлить в стенке самого канала отверстие с диаметром порядка 0,5 мм и по внешней стороне соединить его с манометром (рис. 5-11). Поскольку при такой форме отбора статического давления поток в точке измерения практически не возмущается, само измерение является наиболее точным из всех описанных выше. Здесь целесообразно напомнить, что вдали

от входной зоны канала статическое давление в любой точке какого-либо сечения канала практически одно и то же.

При измерении полного давления потока проблема уменьшения ошибки измерения существенно упрощается. Для этой цели применяют так называемую трубку Пито (рис. 5-12), представляющую собой закругленную в месте встречи с потоком и открытую трубку, другой конец которой сообщается с манометром.

Рассмотрим поле скоростей при натекании стационарного потока на симметричное цилиндрическое тело (будем рассматривать случай потенциального, т. е. безвихревого движения). Линии тока показаны на рис. 5-13. Как видно из рисунка, жидкость, текущая со скоростью ω , останавливается в зоне отверстия трубки и, следовательно, в соответствии с уравнением Бернулли давление в ис-

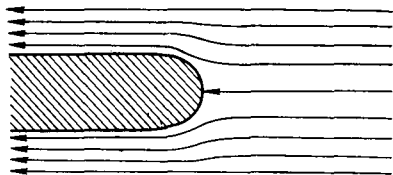


Рис. 5-13. Натекание потока на закругленную трубку

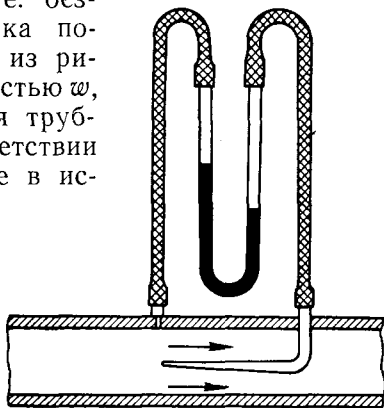


Рис. 5-14. Отбор динамического давления в канале

следуемой точке повысится на величину $\frac{\rho}{2}\omega^2$, т. е. на манометр будет передано давление

$$p_{\text{полн}} = p_{\text{ст}} + \frac{\rho}{2}\omega^2.$$

Представим теперь, что в какой-либо точке жидкости последовательно измерены статическое и полное давление. Тогда может быть определено и динамическое давление

$$p_{\text{дин}} = p_{\text{полн}} - p_{\text{ст}} = \frac{\rho}{2}\omega^2.$$

Величина же динамического давления позволяет вычислить скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{2p_{\text{дин}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_{\text{полн}} - p_{\text{ст}})}{\rho}}.$$

Обычно для измерения скорости в какой-либо точке потока, если исследуется движение в канале, измеряют полное давление

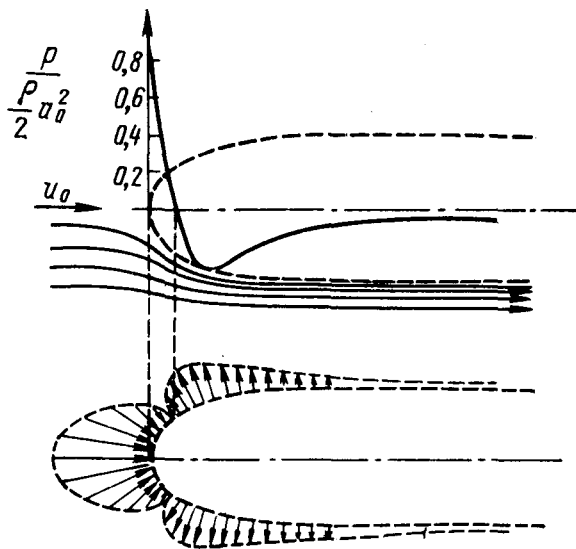


Рис. 5-15. Эпюра давлений на переднем конце полутела

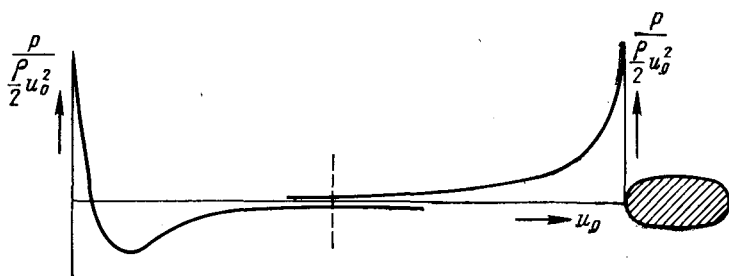


Рис. 5-16. Эпюра давлений с учетом влияния державки

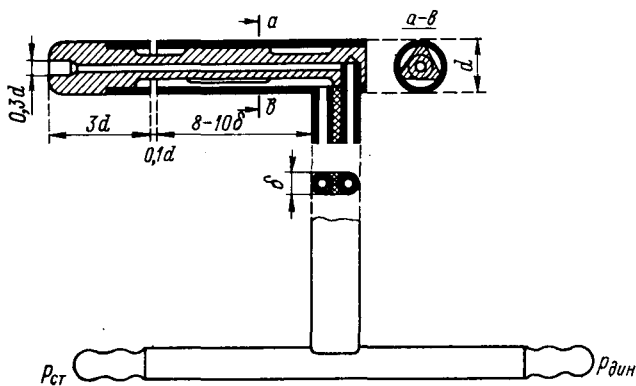


Рис. 5-17. Конструкция трубки Прандтля

в интересующей исследователя точке и статическое давление на стенке канала в том же его сечении (рис. 5-14).

Если совместить возможности двух зондов: отбора статического давления (рис. 5-9) и отбора полного давления (рис. 5-12) в одном, то полученный зонд может быть использован для непосредственного измерения динамического давления в точке.

При конструировании совмещенного зонда, т. е. прибора для измерения динамического давления на основе отбора статического и полного давлений в близко расположенных точках потока, необходимо учитывать картину распределения при обтекании цилиндрического полутела (рис. 5-15). Как видно из рисунка, динамическое давление равно нулю, вблизи конца измерительной трубки и асимптотически приближается к нулю по удалении от конца трубки. Удобно расположить отверстия для отбора статического давления на некотором удалении от точки отбора полного давления (в противном случае небольшая ошибка в расположении отверстий давала бы большой всплеск динамического давления одного или другого знака). Следует учесть также влияние державки, которую также можно рассматривать в качестве цилиндрического полутела (рис. 5-16). Тогда место отбора статического давления определится однозначно. Сконструированный таким образом прибор носит название трубки Прандтля (рис. 5-17).

Трубки Прандтля самых различных диаметров широко применяются при исследованиях электрических машин и их элементов. Большим достоинством этих приборов является независимость их показаний от установки зонда вплоть до значения угла примерно 17° между вектором скорости и осью зонда (рис. 5-18). Этот эффект достигается благодаря встречному влиянию погрешностей измерения полного и статического давления.

Теория показывающего прибора — манометра — несложна и основана на уравнении гидростатического давления, т. е. весьма частном случае уравнения Бернулли. Поэтому здесь будут отмечены лишь некоторые характерные особенности применения манометров.

При использовании ртутных так называемых U-образных манометров для измерений давления воды следует иметь в виду, что ртуть прибора погружена в воду. Поэтому для расчета давления нужно брать не просто удельный вес ртути γ_r , а «удель-

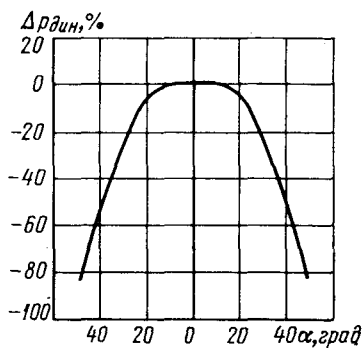


Рис. 5-18. Зависимость ошибки измерения от угла наклона трубки к линии тока

ный вес ртути в воде» $\gamma_{р.в}$, т. е. величину $\gamma_{р.в} = \gamma_{р.} - \gamma_{в} = 13,6 - 1,0 = 12,6 \text{ г/см}^3$. Следовательно, для расчета, например, скорости воды будем иметь:

$$\omega = \sqrt{2gh\gamma_{р.в}} = 0,5\sqrt{h_{мм}}, \text{ м/сек.}$$

При проведении вентиляционных измерений электрических машин применяют обычно микроанометры — приборы, заполненные легкой жидкостью (спиртом) и позволяющие измерять небольшие разности давлений (порядка 0,02 мм вод. ст.) с удовлетворительной точностью (абсолютная ошибка измерения порядка 0,005 мм вод. ст.).

Преимущество микроанометра состоит в том, что благодаря использованию тонкой трубки и наклонной шкалы изменение уровня в широком сосуде (баке) по сравнению с изменением уровня в узком сосуде (трубке) в момент измерения пренебрежимо мало (отношение изменений уровня составляет d^2/D^2 , т. е. малые доли процента). Это позволяет использовать весьма точную шкалу, сводя число отсчетов при измерении до одного.

5-9. Термодинамический анализ движения жидкости или газа при отсутствии теплообмена

Потенциальная энергия давления некоторого объема газа V , находящегося под давлением p , равна произведению pV . Это утверждение хорошо иллюстрируется рис. 5-19, из которого видно, что потенциальная энергия груза F , удерживаемого газом при давлении p на уровне h , как раз составляет величину $Fh = psh = pV$.

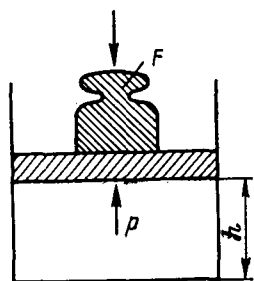


Рис. 5-19. Потенциальная энергия газа

При перемещении некоторого количества газа G из положения 1, в котором оно занимало объем V_1 при давлении p_1 , в положение 2, при котором при давлении p_2 объем будет V_2 , должна быть совершена работа $p_2V_2 - p_1V_1$. Эта работа в соответствии с законом сохранения энергии составит убыль полной энергии E данного количества газа, т. е. в тепловых единицах

$$E_1 - E_2 = A(p_2V_2 - p_1V_1), \quad (5-8)$$

где $A = 1/427$ — тепловой эквивалент механической работы.

Полная энергия газа, рассматриваемого в данном случае в качестве некоторой замкнутой системы весом G , состоит из внутренней энергии U (т. е. энергии частиц, составляющих систему) и кинетической энергии движения всей системы.

$$E = U + A \frac{G\omega^2}{2g}. \quad (5-9)$$

Таким образом получаем:

$$U_1 + A \frac{Gw_1^2}{2g} + Ap_1V_1 = U_2 + A \frac{Gw_2^2}{2g} + Ap_2V_2, \quad (5-10)$$

или после деления на G , т. е. после отнесения всех величин к 1 кг газа.

$$u_1 + A \frac{w_1^2}{2g} + Ap_1v_1 = u_2 + A \frac{w_2^2}{2g} + Ap_2v_2, \quad (5-11)$$

где u и v — удельная внутренняя энергия и удельный объем.

Сумма внутренней энергии газа и потенциальной энергии давления носит название теплосодержания или энтальпии. Для удельной энтальпии имеем

$$i = u + A p v. \quad (5-12)$$

Следовательно, уравнение (5-11) может быть представлено в виде:

$$i_1 + A \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + A \frac{w_2^2}{2g}, \quad (5-13)$$

что может быть сформулировано следующим образом: *при теплоизолированном стационарном движении газа или жидкости сумма удельной энтальпии и удельной кинетической энергии сохраняет неизменное значение.*

Нетрудно видеть, что уравнение (5-12) для случая постоянства удельной внутренней энергии газа u вполне идентично уравнение Бернулли (4-20), поскольку $v = 1/\gamma$.

Весьма важной особенностью уравнения (5-13) является то, что оно в равной мере действительно для идеальных и вязких жидкостей и газов, т. е. для обратимых адиабатных процессов течения и процессов необратимых, в которых действуют силы трения и выделяется тепло.

Практически эта особенность выражается в том, что *потери трения, превращаясь в тепло, которое в теплоизолированных трубах полностью передается движущейся среде, не могут повысить температуру этой среды, если поток жидкости или газа не воспринимает механическую энергию (работу) от внешних источников.*

Следует заметить, что сформулированная выше теорема не всегда бывает учтена, что приводит к недоразумениям в практических расчетах. В литературе можно даже встретить формулы для определения подогрева среды за счет потерь трения [57]. Целесообразно поэтому более подробно остановиться на физических обстоятельствах адиабатного движения в каналах.

Рассмотрим сумму энтальпии и кинетической энергии $i + A \frac{w^2}{2g} = i_0$. Поскольку сумма эта вдоль струи неизменна, энтальпия может изменяться (возрастать или уменьшаться)

только за счет изменения скорости струи. Но энтальпия, представляющая собой сумму запасенной энергии — внутренней и энергии давления, есть линейная функция абсолютной температуры:

$$i = c_p T, \quad (5-14)$$

где c_p — теплоемкость среды при постоянном давлении.

Таким образом, температура струи может изменяться только за счет изменения скорости движения. По этой причине максимальную достижимую температуру струя приобретает в точках полного торможения потока ($w=0$):

$$T_0 = \frac{i_0}{c_p}. \quad (5-15)$$

Температура T_0 называется температурой торможения.

Введем теперь в рассмотрение потери энергии на трение $q_{тр}$. Будем иметь в виду, что эти потери в форме тепла добавляются к первоначальной энергии струи:

$$i_1 + A \frac{w_1^2}{2g} + q_{тр}.$$

Чтобы учесть потери трения в балансе энергии, необходимо ввести также работу $l_{тр}$, совершенную газом по преодолению сил трения при переходе из состояния 1 в состояние 2,

$$i_2 + A \frac{w_2^2}{2g} + Al_{тр}.$$

Таким образом, при учете сил трения и тепла трения уравнение сохранения энергии имеет вид:

$$i_1 + A \frac{w_1^2}{2g} + q_{тр} = i_2 + A \frac{w_2^2}{2g} + Al_{тр}.$$

Поскольку, однако, работа $l_{тр}$ полностью переходит в эквивалентное ей количество тепла $q_{тр}$, т. е. $Al_{тр} = q_{тр}$, введение работы трения в уравнение (5-13) ничего не меняет.

Пусть теперь струя воспринимает механическую энергию (работу) L от внешнего источника, например в вентиляторе или каналах вращающегося ротора. Тогда

$$i_1 + A \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + A \frac{w_2^2}{2g} + AL. \quad (5-16)$$

При совершении газом или жидкостью внешней, так называемой технической работы будем иметь:

$$i_1 + A \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + A \frac{w_2^2}{2g} - AL. \quad (5-17)$$

Таким образом, температура торможения струи может изменяться лишь за счет совершения технической работы. В вентиляторах, компрессорах и насосах температура струи повышается; в турбинах и детандерах — понижается.

Уравнение теплосодержания (5-16) есть не что иное как выражение первого закона или первого начала термодинамики для случая адиабатного движения струи в канале.

5-10. Режимы движения жидкостей

Издавна было замечено, что при увеличении скорости истечения воды из насадки (например, из крана водопроводной сети) струя, бывшая до этого момента прозрачной и невозмущенной, внезапно становится молочно-мутной и теряет характерную форму сплошного стержня, делается неровной, выбрызгивает мелкие капли.

Первый режим движения называется параллельным или ламинарным, поскольку в прозрачной трубе можно наблюдать, как взвешенные в воде частицы (например, мелкие древесные опилки) движутся параллельно стенкам трубы.

Второй режим, для которого характерно бурное, по внешнему виду хаотическое движение частиц, напоминающее броуновское движение, называется турбулентным.

Заслуга формирования условий перехода одного вида движения в другой принадлежит О. Рейнольдсу.

Пользуясь соображениями о размерности членов уравнения движения вязкой жидкости, Рейнольдс теоретически получил, а затем экспериментально доказал, что при соблюдении геометрического подобия переход от ламинарного движения к турбулентному и обратно может зависеть только от безразмерного комплекса wd/ν . Это означает, что при самых различных скоростях движения, размерах каналов, применяемых жидкостях и их температурах величина wd/ν , при которой происходит смена режимов течения, или, как ее называют, критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$, есть величина неизменная и равная 2200, если за характерный размер канала d принят его гидравлический диаметр $d=4s/\Pi$. В последней формуле s — сечение канала, Π — его периметр. Как видно, для круглой трубы гидравлический диаметр совпадает с геометрическим.

Экспериментальная установка Рейнольдса схематически изображена на рис. 5-20. Истечение через прозрачную трубку (3) из прозрачного бака (2) осуществлялось под постоянным давлением. Скорость истечения регулировалась краном (4) на выходе. Вход в трубку выполнялся с закруглением для предотвращения деформации потока и образования завихрений. Через насадку (1) на вход подавалась тонкая струя окрашенной воды. В ламинарном движении воды, т. е. когда скорость не превышала критической для данной трубки и число Рейнольдса не

превышало критического значения $Re_{кр}$, подкрашенная струя двигалась вместе с водой в трубке, не смешиваясь с ней. При достижении критической ситуации на некотором расстоянии от входа в трубу (порядка 30 диаметров) внезапно возникала область бурного перемешивания, причем как выше, так и ниже по течению движение оставалось ламинарным.

Турбулентная зона подобно пробке перемещалась вниз по течению. Скорость при этом (при неизменном открытии крана и давлении в баке) уменьшалась по сравнению с величиной критической скорости. Но как только турбулентная зона вытекала из трубки, скорость вновь повышалась до критического значения и вновь на прежнем месте возникала турбулентная зона. Таким образом движение приобретало неустановившийся пульсирующий характер. Дальнейшее открытие крана и увеличение скорости сверх критического значения приводило к возникновению устойчивой турбулентности на всей длине трубки.

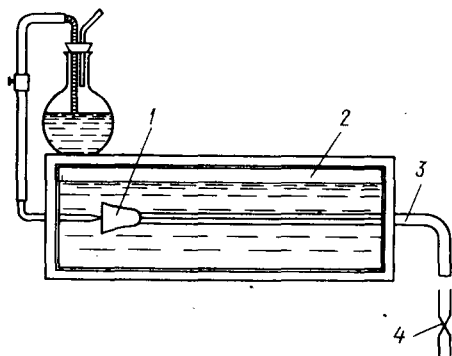


Рис. 5-20. Схема экспериментальной установки Рейнольдса

Аналогичные факты наблюдались многими другими исследователями. Причем было установлено, что критическое число Рейнольдса не есть, вообще говоря, константа,

а есть функция условий входа. Уже Рейнольдсу удалось в несколько раз увеличить $Re_{кр}$ за счет устранения на входе возмущающих факторов. Однако в конструкциях электрических машин практически все каналы имеют на входе острые кромки и сужение струи, что позволяет в качестве критического принимать число Рейнольдса 2200. И только для случаев весьма длинных каналов систем жидкостного охлаждения (водяного и масляного) это значение, как мы увидим ниже, несколько увеличивают.

5-11. Сопротивление жидкости при ламинарном режиме движения

Рассмотрим удаленный от входа участок гладкой круглой трубы, по которой движется жидкость в докритическом, т. е. устойчивом ламинарном режиме. Разность давлений между двумя сечениями трубы (рис. 5-21) $p_1 - p_2$ создает усилие, уравновешенное силой трения, т. е. напряжением сдвига на поверхности цилиндра $2\pi\mu l$:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = 2\pi\mu l r$$

или

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}.$$

Но из закона Ньютона для касательных напряжений (§ 2-2) имеем:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}.$$

Отсюда

$$\frac{dw}{dy} = \frac{p_2 - p_1}{\mu l} \frac{y}{2},$$

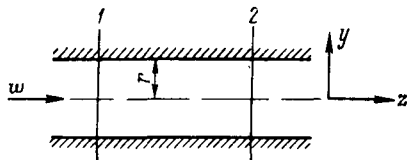


Рис. 5-21. Трение на участке канала

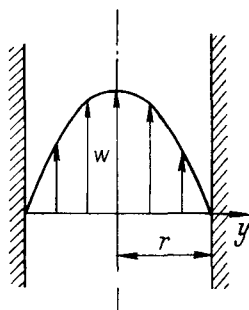


Рис. 5-22. Эпюра скоростей по сечению канала при движении в ламинарном режиме

где учтено, что производная отрицательная, так как скорость увеличивается к центру трубы. Следовательно,

$$\int_r^y dw = \frac{p_2 - p_1}{2\mu l} \int_r^y y dy$$

или, учитывая, что $w_r = 0$ (жидкость прилипает к стенкам),

$$w(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - y^2).$$

Таким образом, распределение скорости при ламинарном течении по сечению круглой трубы имеет форму параболоида вращения (рис. 5-22).

Максимальная скорость в центре трубы, при $y=0$, $w_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2$. Для получения расхода выразим объем параболоида через его высоту, т. е. максимальную скорость:

$$Q = \frac{\pi r^2}{2} w_0 = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi r^4. \quad (5-18)$$

Теперь можем определить среднюю скорость $\omega = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} r^2$, откуда

$$p_1 - p_2 = \Delta p = 8\mu \frac{l\omega}{r^2}. \quad (5-19)$$

Таким образом оказалось возможным теоретически получить закон сопротивления при установившемся ламинарном движении вязкой жидкости в гладкой круглой трубе. Следует заметить, что это один из немногих случаев, когда интегрирование уравнения вязкой жидкости возможно. Полученный закон сопротивления называется законом Пуазейля.

Придадим ему несколько иной вид, нашедший более широкое применение в вентиляционных и гидравлических расчетах электрических машин:

$$\begin{aligned} \Delta p = 8\mu \frac{l\omega}{r^2} &= 8\rho\nu \frac{l\omega}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 64 \frac{\rho}{2} \frac{l}{d} \frac{\nu}{d\omega} \omega^2 = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \omega^2 = \\ &= \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \omega^2 = \xi \frac{\rho}{2} \omega^2. \end{aligned} \quad (5-20)$$

Здесь $\lambda = 64/\text{Re}$ — коэффициент трения.

В этой форме записи закона Пуазейля потери давления выражены через коэффициент сопротивления и динамическое давление струи — так и предполагалось поступать при анализе природы сопротивления (§ 5-5). Следует, однако, особо подчеркнуть, что, как видно из формулы (5-19), потери давления при ламинарном движении пропорциональны первой степени скорости движения, но отнюдь не второй степени. Что же касается придания закону Пуазейля формы, в которой коэффициент сопротивления определяется как некоторое частное от деления потерь давления на величину скоростного давления, то делается это исключительно в интересах общности гидравлических расчетов для ламинарного и турбулентного движений и общности обработки экспериментальных данных по коэффициентам сопротивлений $\xi = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \omega^2}$.

Для полноты следует добавить, что параболическое распределение скоростей устанавливается не в начальном участке трубы, а лишь там, где под влиянием внутреннего трения произошло торможение слоев жидкости, удаленных от стенок трубы. На начальном же участке почти вся масса жидкости движется примерно с равной скоростью, переход к которой от нулевой скорости у стенок осуществляется в тонком пограничном слое.

Так как параболоид вращения имеет двойную высоту по сравнению с равновеликим с ним по объему цилиндром с той же площадью основания, то максимальная скорость ω_0 в центре трубы вдвое превосходит величину средней скорости ω . Поэтому при измерениях скорости в ламинарном движении, когда измерительный прибор установлен в центре струи, для получения средней скорости измеренное значение делят на два.

5-12. Сопротивление жидкости при турбулентном движении

Сопротивление жидкости при турбулентном движении в связи с чрезвычайной сложностью этого движения не может быть изучено теоретически. В то же время в большинстве инженерных задач, в том числе и в электромашиностроении, приходится иметь дело именно с турбулентным режимом движения. В связи с этим в течение длительного периода был накоплен огромный экспериментальный материал по зависимости потерь давления от скорости течения жидкости. Применение принципа гидромеханического подобия позволило обобщить этот материал для широкого класса конструкций каналов и весьма широкого диапазона чисел Рейнольдса.

Закон сопротивления гладких труб в турбулентном режиме дал Блазиус. Формально он записывается точно так же, как и сформулированный выше закон Пуазейля для ламинарного движения, т. е.

$$\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} \omega^2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \omega^2, \quad (5-21)$$

где коэффициент трения

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} = 0,316 Re^{-0,25}. \quad (5-22)$$

Однако перепады давления при турбулентном течении зависят от скорости в значительно большей степени (близкой ко второй), чем при ламинарном.

Совместим для сопоставления оба графика на одном рисунке (рис. 5-23), причем в связи с растянутостью диапазона чисел Рейнольдса и коэффициентов трения будем откладывать по осям их логарифмы.

Как видно из рисунка, наклон графиков различен и равен для турбулентного режима 1 : 4, что соответствует степени числа

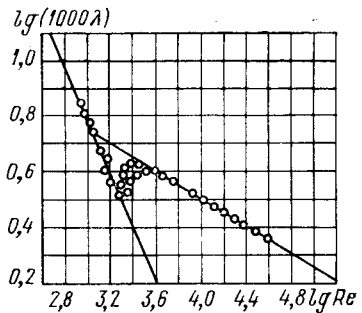


Рис. 5-23. Зависимость коэффициента трения от режима движения жидкости

Рейнольдса 0,25. На этом же рисунке приведены опытные данные, полученные различными исследователями. Здесь наглядно видно, что при переходе от ламинарного режима к турбулентному сопротивление вначале резко возрастает, затем снова постепенно уменьшается. Диапазон критических чисел Рейнольдса, хорошо видный на графиках, следует, вообще говоря, считать зоной неустойчивого движения.

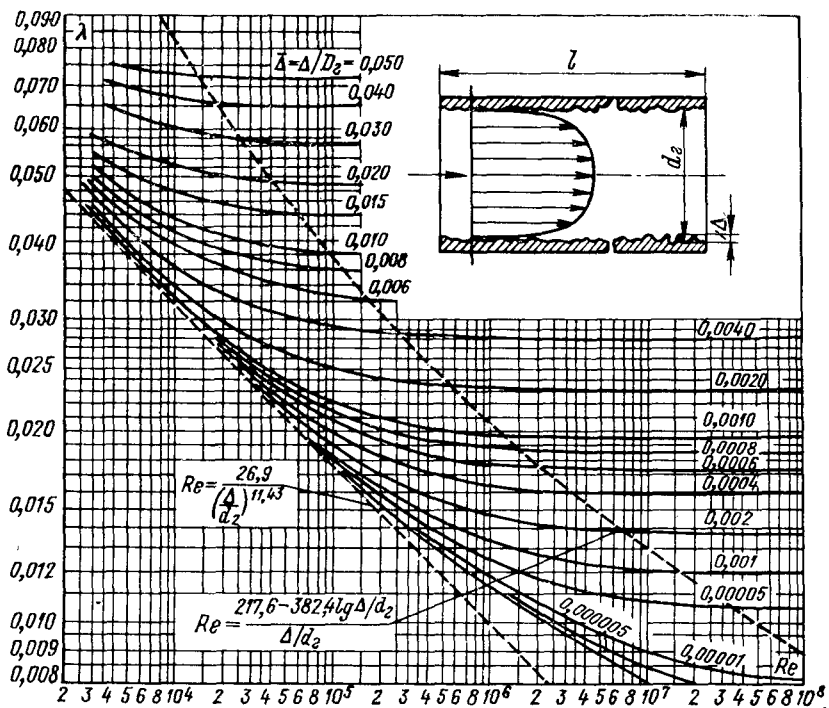


Рис. 5-24. Коэффициенты трения шероховатых каналов

Именно фактом резкого возрастания сопротивления объясняются колебания скорости в переходном режиме, которые наблюдал Рейнольдс и после него многие другие исследователи. Когда после возникновения турбулентной зоны турбулентная пробка выливается из трубы, сопротивление скачком возвращается к исходному, скорость вновь возрастает до критической, вновь возникает турбулентная зона и т. д. В практике исследования систем охлаждения электрических машин приходится наблюдать такие явления. Для них характерны колебания менисков манометров, регистрирующих давление в зоне неустойчивого течения.

Если трубы не гладкие, а имеют на своих внутренних стенках выступы (такие трубы называются шероховатыми),

то зависимость сопротивления от скорости или числа Рейнольдса существенно меняется. Для оценки шероховатости пользуются величиной относительной шероховатости

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}, \quad (5-23)$$

где Δ — абсолютная величина типичного выступа.

При таком подходе коэффициент трения λ определяется как функция двух независимых переменных, одну из которых при построении графиков принимают в качестве параметра:

$$\lambda = f(\text{Re}, \bar{\Delta}). \quad (5-24)$$

Шероховатость, образованная небольшими по величине, но острыми выступами и кромками, в такой мере турбулизует поток, что падение давления в трубе практически не зависит от числа Рейнольдса, начиная с небольших чисел Рейнольдса (рис. 5-24). Режим течения в этом случае иногда называют автомодельным, имея в виду, что при моделировании можно не считаться с различиями в числах Рейнольдса модели и природы.

Чем более плавными являются выступы, формирующие шероховатость трубы, тем ближе закон ее сопротивления к закону Блазиуса (нижние кривые на рисунке). Здесь автомодельность наступает при значительно больших числах Рейнольдса.

Семейство кривых, приведенных на рис. 5-24, охватывает практически весь диапазон шероховатостей, встречающихся в конструкциях электрических машин. Ниже приведены типичные значения абсолютной шероховатости, мм, для различных типов канала:

Зазор между ротором и статором	1,00—0,60
Аксиальные каналы активной стали статора, обра- зуемые при шихтовке	0,50—0,40
Аксиальные каналы активной стали ротора, обра- зуемые сверлением	0,30—0,20
Соединительные резиновые шланги	0,20—0,10
Соединительные фторопластовые шланги	0,15—0,10
Тянутые стальные трубы, укладываемые в пазы активной стали	0,10—0,05
Тянутые латунные трубы, применяемые как эле- менты теплообменников	0,06—0,03

5-13. Распределение скоростей при турбулентном движении. Пограничный слой.

При турбулентном течении, как и при ламинарном, профиль скоростей устанавливается не сразу, т. е. имеется так называемый начальный участок. Однако длина его невелика (по разным данным от 10 до 50 диаметров канала) и не зависит от числа Рейнольдса.

Профиль скоростей для развитого турбулентного режима показан на рис. 5-25. Как видно из этого рисунка, максимальная скорость отличается от средней примерно лишь на 20%. Однако эта величина зависит от степени турбулизации течения, т. е. от числа Рейнольдса. Последнее важно учитывать при измерениях в трубах, когда измеритель скорости устанавливается в центре потока. В этом случае средняя скорость для последующего вычисления расхода определяется по формуле $\omega = k\omega_0$, где коэффициент k называется коэффициентом поля и может быть приближенно определен в функции числа Рейнольдса из графика на рис. 5-26.

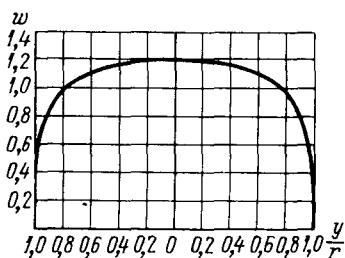


Рис. 5-25. Зависимость скорости от радиуса круглой трубы при турбулентном течении

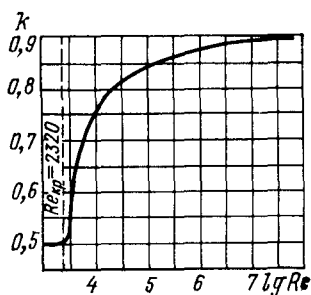


Рис. 5-26. Зависимость коэффициента поля от режима течения

Следует, однако, иметь в виду, что устойчивый профиль скоростей, соответствующий развитой турбулентности, устанавливается на значительном расстоянии от входа. Поэтому при измерениях в коротких каналах коэффициент поля каждый раз должен быть определен экспериментально.

Характерным для устойчивого турбулентного распределения скоростей является значительное изменение скорости (от нуля до почти шестидесятипроцентной доли максимальной скорости) в тонком пограничном слое.

Л. Прандтль на основе экспериментального закона Блазиуса и некоторых простых предположений о пограничном слое получил формулу зависимости скорости от расстояния от стенки трубы, которая называется законом корня седьмой степени для турбулентного распределения скоростей:

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7}, \quad (5-25)$$

где y — расстояние от стенки трубы радиуса r .

Таким образом, при турбулентных течениях в трубах с гладкими стенками скорость в поперечном сечении возрастает пропорционально корню седьмой степени из расстояния от стенки.

Закон этот верен в том же диапазоне чисел Рейнольдса, что и закон Блазиуса, из которого он исходит, т. е. примерно до $Re = 10^5$.

Следует подчеркнуть, что Л. Прандтлю принадлежит заслуга разработки общей теории пограничного слоя (1904 г.), которая явилась мощным стимулом развития теоретической и прикладной гидродинамики. Теория пограничного слоя позволила объяснить причины возникновения вихревого движения из состояния покоя, что ранее было необъяснимо, и дала научную основу теории сопротивления жидкостей.

Существованием и особенностями поведения пограничного слоя объясняются, в частности, и многие явления турбулентности, в том числе ее возникновение. В настоящее время считают, что при увеличении числа Рейнольдса до критического значения ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный и в случае движения в трубах, отрываясь от стенок, переносит турбулентность во всю массу текущей жидкости.

В расширяющихся каналах (диффузорах) частицы жидкости, заторможенные в пограничном слое, теряют кинетическую энергию в такой мере, что не могут продвигаться в направлении повышающегося давления (в направлении движения сечение диффузора увеличивается, скорость уменьшается и давление возрастает). Указанные частицы останавливаются и затем двигаются в обратном направлении. Это приводит к распаданию деформированного пограничного слоя на отдельные вихри, которые распространяются в значительных зонах сечения диффузора (подробнее в § 5-15).

Толщина пограничного слоя при турбулентном движении

$$\delta = \frac{0,37}{\sqrt[5]{Re}} x, \quad (5-26)$$

где x — характерный линейный размер, принятый для определения числа Re .

Для сопоставления укажем, что при ламинарном движении толщина пограничного слоя в большей степени зависит от числа Re :

$$\delta_{\text{лам}} = \frac{3,4}{\sqrt{Re}} x. \quad (5-27)$$

5-14. Теорема количества движения. Потери давления при внезапном расширении канала

Выведем формулу для расчета потерь давления при внезапном расширении канала и проиллюстрируем на этом примере применение весьма важной в механике жидкости теоремы количества движения или, как ее иногда называют, теоремы импульсов.

Теорема количества движения часто оказывается полезной в тех случаях, когда уравнения движения в исследуемой области не могут быть составлены или проинтегрированы, но бывает достаточно определить движение жидкости в некоторых исходном и конечном состояниях. Таким образом, эта теорема позволяет судить о движении без исследования механизма движения.

Теорема формулируется следующим образом: *отнесенное к единице времени изменение количеств движения ($\Sigma m\mathbf{w}$) системы раздельных материальных точек равно сумме сил, действующих на эту систему извне:*

$$\frac{d}{dt} (\Sigma m\mathbf{w}) = \Sigma \mathbf{F}, \quad (5-28)$$

где $\Sigma \mathbf{F}$ — сумма сил, с которыми на массы системы действуют массы, не принадлежащие к системе.

Представление жидкости в качестве континуума, т. е. сплошной среды, переводит сумму $\Sigma m\mathbf{w}$ в интеграл $\int \mathbf{w} dm$. При этом получаем

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{w} dm = \Sigma \mathbf{F}. \quad (5-29)$$

Рассмотрим элемент ds контрольной поверхности s , через которую перемещается некоторый замкнутый объем жидкости. За элемент времени dt через элемент поверхности ds проходит объем $\mathbf{w} dt ds$ и, следовательно, масса $dm = \rho \mathbf{w} dt \cdot ds$. Таким образом в единицу времени через ds будет перенесено количество движения $dm\mathbf{w} = \rho \mathbf{w} \cdot ds \mathbf{w}$.

Изменение количества движения системы равно сумме элементарных переносов количества движения, взятой по замкнутой контрольной поверхности, т. е. искомое изменение интеграла $\frac{d}{dt} \int \mathbf{w} dm$ оказывается равным интегралу по замкнутой поверхности от секундного изменения количества движения через элемент поверхности:

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{w} dm = \oint \oint \rho \mathbf{w} \cdot ds \mathbf{w}. \quad (5-30)$$

Это векторное равенство в проекции, например, на ось Ox дает

$$\frac{dx}{dt} \int \mathbf{w} dm = \oint \oint \rho |\mathbf{w}| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{w}) u ds,$$

где \mathbf{n} — направление положительной нормали к поверхности.

Если, например, элемент поверхности перпендикулярен к направлению оси Ox , т. е. направление нормали совпадает с направлением оси, то переносимая масса равна $\rho u ds$ и

$$\frac{dx}{dt} \int \mathbf{w} dm = \oint \oint \rho u^2 ds. \quad (5-31)$$

Перейдем к рассмотрению правой части уравнения (5-28). Если не учитывать силу тяжести, то внешними силами оказываются лишь силы давления, т. е. $\oint \oint p ds$, где p — независимая переменная. Таким образом для теоремы импульсов получаем:

$$\oint \oint \rho \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} \mathbf{w} = \oint \oint p ds. \quad (5-32)$$

При использовании последнего равенства следует иметь в виду, что в интеграле справа положительным следует всегда считать направление снаружи внутрь, т. е. направление силы сжатия.

Рассмотрим теперь ситуацию в потоке жидкости при внезапном расширении канала. На рис. 5-27 контрольная поверхность проведена в широком сечении канала таким образом, что через цилиндрическую часть поверхности, прилегающую к стенкам канала, поток импульсов отсутствует. Следовательно, необходимо учесть изменение количества движения применительно лишь

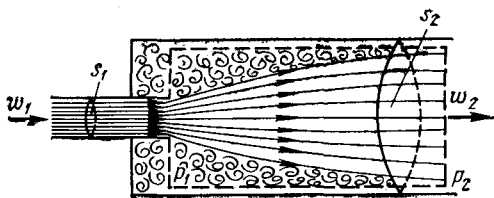


Рис. 5-27. Внезапное расширение канала

к двум площадям контрольной поверхности: торцовой площади входа и торцовой площади выхода. Учитывая, что давление p_1 практически неизменно по всей площади входа (т. е. по сечению канала сразу за расширением, о чем свидетельствует опыт) и что скорость струи сразу после расширения практически не отличается от скорости на выходе из узкого сечения трубы, т. е. равна w_1 , будем иметь:

$$\rho s_2 w_2^2 - \rho s_1 w_1^2 = s_2 (p_1 - p_2). \quad (5-33)$$

В соответствии с уравнением неразрывности $w_1 s_1 = w_2 s_2$, откуда $\rho w_2^2 - \rho w_1 w_2 = p_1 - p_2$. Таким образом, искомая разность давлений

$$\delta p = p_2 - p_1 = \rho w_2 (w_1 - w_2).$$

Определим теперь повышение давления в выходном сечении контрольной поверхности, но для случая, когда необратимые потери давления Δp отсутствуют (плавное расширение), т. е. когда действительно уравнение Бернулли в форме (4-22). Будем иметь:

$$\delta p_0 = p_{20} - p_{10} = \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2).$$

Отсюда повышение давления δp для случая внезапного расширения окажется меньше, чем при плавном расширении, на величину необратимых потерь давления:

$$\Delta p = \delta p_0 - \delta p = \frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \rho \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) = \frac{\rho}{2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Следовательно, может быть определен коэффициент местного сопротивления расширения

$$\xi_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \omega_2^2} = \frac{\frac{\rho}{2} (\omega_1 - \omega_2)^2}{\frac{\rho}{2} \omega_2^2} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right)^2. \quad (5-34)$$

При разветвлении струи из одного общего канала (например, канала после вентилятора электрической машины) в несколько других каналов (например, в зазор электрической машины и камеру лобовых соединений) явление можно рассматривать как внезапное расширение, т. е.

$$\xi = \left(1 - \frac{\sum s_i}{s_1}\right)^2,$$

где s_i — сечение ответвляющегося канала.

5-15. Потери давления при сужении канала, движении через отверстия и решетки, движении при плавном изменении сечения и поворотах. Сопротивление ответвления

Применение теоремы количества движения позволяет определить потери давления при движении струй с внезапным сужением сечения (рис. 5-28). В этом случае нужно только учесть,

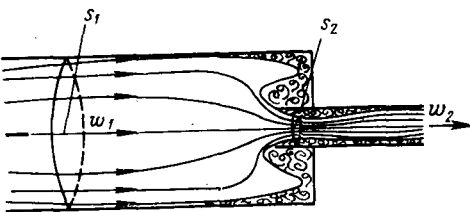


Рис. 5-28. Внезапное сужение канала

что в кольцевом сечении широкого канала (торцевая кольцевая стенка канала), охватывающем сечение входа в узкий канал, вследствие полного торможения струи устанавливается полное давление, равное сумме динамического и статического давлений. Тогда величина необратимых потерь давления оказывается равной:

$$\Delta p = \eta \frac{\rho \omega_2^2}{2} \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right),$$

и коэффициент местного сопротивления сужения

$$\xi_c = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \omega_2^2} = \eta \left(1 - \frac{s_2}{s_1} \right). \quad (5-35)$$

При слиянии нескольких струй можно считать

$$\xi = \eta \left(1 - \frac{s_2}{\Sigma s_1} \right),$$

где s_i — сечение данной ветви до слияния; $\eta \approx 0,5$.

В случае движения струи через отверстие в стенке, т. е. из помещения произвольного сечения в другое помещение произвольного сечения, в силу искривления линий тока полезно используется лишь часть сечения отверстия. Обозначим через ε отношение площади узкого сечения потока в отверстии s_0 к площади отверстия и назовем его коэффициентом заполнения сечения. Тогда с учетом сужения и последующего расширения коэффициент сопротивления отверстия

$$\xi_0 = \frac{\Delta p}{\frac{\rho \omega_2^2}{2}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{s_2}{s_3} \right)^2. \quad (5-36)$$

Коэффициент ε зависит от отношения сечений s_2 и s_1 и может быть вычислен по приближенной формуле:

$$\varepsilon = 0,6 + 0,4 \left(\frac{s_2}{s_1} \right). \quad (5-36')$$

В приведенных формулах s_1 — сечение перед отверстием, s_2 — сечение отверстия, s_3 — сечение после отверстия.

Представляет интерес сопротивление решеток и сеток, установленных в каналах. Коэффициент сопротивления, отнесенный к динамическому давлению в канале перед решеткой (сечение s_i), в этом случае равен:

$$\xi_{\text{реш}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \omega_1^2} = \left(1,5 - \frac{s_2}{s_1} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2, \quad (5-37)$$

где s_2 — живое сечение решетки (оно определяется обычно как известная для данного типа решетки доля живого сечения канала).

При движении жидкости в расширяющемся канале — диффузоре — резко возрастает интенсивность турбулизации потока по сравнению с каналом неизменного сечения, так как в рассматриваемом случае отрыв пограничного слоя у стенок канала происходит при дополнительном воздействии встречного градиента статического давления, обусловленного уменьшением скорости в направлении движения (§ 5-13). Сопротивление диффузора

в большой мере зависит от так называемого угла расширения или угла раскрытия α (рис. 5-29). Кроме того, должно быть учтено сопротивление трения, т. е.

$$\xi_{\text{диф}} = \xi_{\text{диф. расш}} + \xi_{\text{диф. тр.}}$$

Потери расширения в диффузоре могут быть выражены как доля потерь соответствующего внезапного расширения $\xi_{\text{диф. расш}} = \varphi \xi_{\text{р}}$. Коэффициент φ есть функция угла раскрытия α , и при из-

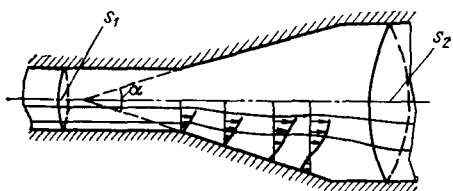


Рис. 5-29. Движение в диффузоре

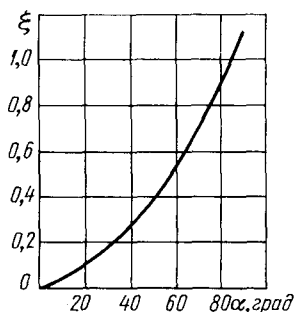


Рис. 5-30. Зависимость коэффициента сопротивления от угла поворота канала

мерении последнего в градусах $\varphi \approx 0,001 \alpha^2$. Потери трения зависят от угла раскрытия:

$$\xi_{\text{диф. тр.}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} (n^2 - 1),$$

где λ — коэффициент трения; $n = s_2/s_1$ — отношение сечений диффузора.

Таким образом, коэффициент сопротивления диффузора

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} w_2^2} = 0,001 \alpha^2 \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right)^2 + \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 - 1 \right]. \quad (5-38)$$

Коэффициент сопротивления поворота струи, сопровождающегося образованием вихревых зон на внутренней и наружной поверхностях канала, может быть определен из графика рис. 5-30. Для угла 90° .

$$\xi_{\text{п}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} w^2} = 1,1. \quad (5-39)$$

Особый интерес представляет расчет сопротивления при отвлении от общего потока доли или нескольких долей потока.

В конструкциях электрических машин такой вид сопротивления встречается весьма часто.

Физическая сущность сопротивления при разделении и слиянии потоков жидкости хорошо видна при анализе движения в приточных (рис. 5-31) и вытяжных (рис. 5-32) тройниках.

Основные потери в приточных тройниках состоят из потерь внезапного расширения в месте разделения потока и потерь на поворот потока в боковом ответвлении. Если обозначить скорость до ответвления через w , скорость после ответвления v

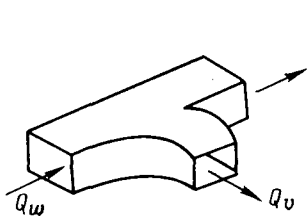


Рис. 5-31. Приточный тройник

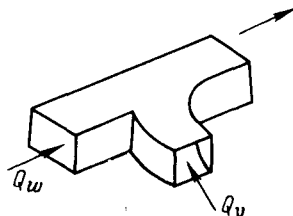


Рис. 5-32. Вытяжной тройник

и придать соответствующие индексы коэффициенту сопротивления ξ , расходу Q и сечению s , то получим:

$$\xi_{\text{прит. тр}}^w = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} w^2} = 1 + \left(\frac{Q_w}{Q_v} \frac{s_w}{s_v} \right)^2 = 1 + \left(\frac{v}{w} \right)^2. \quad (5-40)$$

Полезно иметь в виду выражение для этого же коэффициента сопротивления, но по отношению к ответвившемуся потоку

$$\xi_{\text{прит. тр}}^v = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} v^2} = \xi_{\text{прит. тр}}^w \left(\frac{w}{v} \right)^2 = 1 + \left(\frac{w}{v} \right)^2. \quad (5-41)$$

Основные потери в вытяжных тройниках состоят из потерь на турбулентное смешение двух потоков с различными скоростями и потерь на поворот потока при выходе из бокового ответвления. Коэффициент сопротивления

$$\begin{aligned} \xi_{\text{выт. тр}}^w &= \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} w^2} = 1 + \left(\frac{Q_w}{Q_v} \frac{s_w}{s_v} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{Q_v}{Q_w} \right)^2 = \\ &= 1 + \left(\frac{v}{w} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{v s_v}{w s_w} \right)^2. \end{aligned} \quad (5-42)$$

Для скоростного давления в ответвлении получим:

$$\xi_{\text{выт. тр}} v = \frac{\Delta p}{\rho} = \xi_{\text{выт. тр}}^w \left(\frac{w}{v}\right)^2 = 1 + \left(\frac{w}{v}\right)^2 - 2\left(\frac{w}{v} - \frac{s_v}{s_w}\right)^2. \quad (5-43)$$

5-16. Аэродинамические и гидродинамические сопротивления электрической машины

В конструкциях электрических машин при движении охлаждающих сред проявляются все виды рассмотренных выше сопротивлений, т. е. сопротивления расширения и сужения струи, трения и поворота, разделения и слияния струй. Пути движения охлаждающих сред бывают при этом достаточно сложными. Расчет полного сопротивления машины для таких условий составляет задачу вентиляционного и гидравлического расчетов, подробно излагаемую в последующих главах.

Здесь же для завершения анализа локальных, или, как их называют, местных, сопротивлений целесообразно рассмотреть обобщенные элементы конструкции, включающие разные сопротивления, безотносительно ко всей конструкции электрической машины и схеме циркуляции охлаждающих сред.

Смысл такого рассмотрения заключается в выработке некоторых общих положений расчета и в анализе связей между теоретическими соотношениями и практическими инженерными расчетами машин.

Двигаясь в канале, струя жидкости или газа преодолевает сопротивления разного вида. Условно эти сопротивления можно считать последовательно соединенными между собой хотя, например, при повороте канала одновременно наличествует и трение о стенки.

По аналогии с электрической цепью аэродинамические и гидравлические тракты принято изображать в виде сопротивлений, соединенных между собой отрезками каналов, не имеющих сопротивления. На рис. 5-33 изображено последовательное соединение разных видов гидравлических сопротивлений и схема замещения этой цепи (ее часто называют эквивалентной схемой). Как видно из рисунка, сечение канала в общем случае переменное. По этой причине при заданной величине расхода среды Q скорость ее оказывается также переменной.

Выше мы видели (§ 5-15), что потери давления на преодоление какого-либо гидравлического сопротивления принято вычислять с помощью экспериментально найденного коэффициента местного сопротивления ξ как долю динамического давления $\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} w^2$. Чтобы исключить из расчета переменную величину скорости движения, удобно выразить потери давления как

функцию неизменной для данного канала величины расхода Q :

$$\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{s} \right)^2 = z Q^2, \quad (5-44)$$

где z — коэффициент гидродинамического или аэродинамического сопротивления, соответствующий коэффициенту местного сопротивления каждого данного вида. Например, коэффициент аэродинамического сопротивления

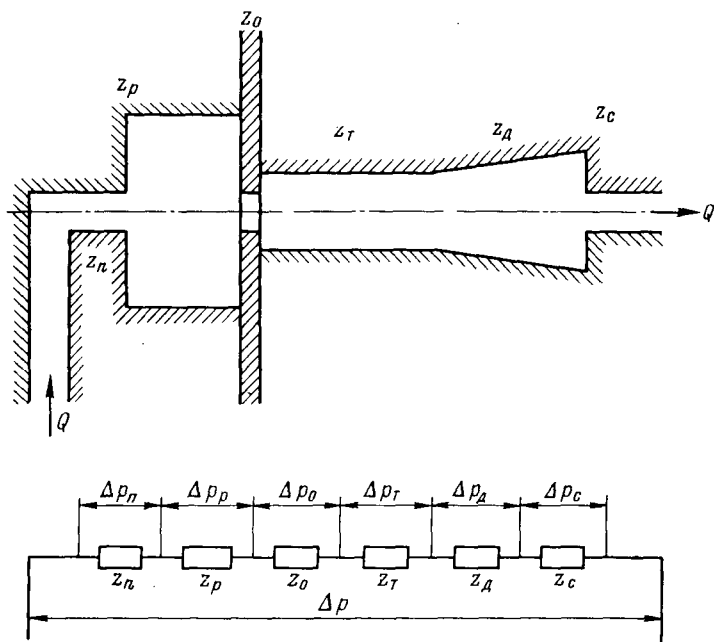


Рис. 5-33. Последовательное соединение сопротивлений

внезапного расширения (или просто аэродинамическое сопротивление расширения) $z_p = \xi_p \frac{\rho}{2s^2}$.

Проделанная замена позволяет упростить расчет, однако требует внимательного отношения к величинам сечений канала при определении коэффициентов того или иного вида сопротивления. Так, например, трение проявляется по всей длине канала, т. е. для всех встречающихся сечений. При расчете сопротивлений внезапного расширения следует учитывать, что формула потерь давления дана для динамического давления в широком сечении, т. е.

$$z_p = \left(1 - \frac{s_2}{s_1} \right)^2 \frac{\rho}{2s_2^2}$$

и т. п.

Коэффициент z в соотношении $\Delta p = zQ^2$, называемом иногда законом Аткинсона, зависит, как это очевидно, от свойств охлаждающей среды и поэтому не имеет аналогии с сопротивлением участка электрической цепи. Можно заметить, что и сам закон Аткинсона в силу его нелинейности не аналогичен закону Ома.

В то же время изображение аэродинамических и гидравлических трактов в виде электрических цепей обладает большой наглядностью и удобно в приложениях. Кроме того, в связи с аналогией расхода среды и электрического тока к схемам замещения применимы законы Кирхгофа для электрических цепей.

Коэффициент z , имеющий размерность $\text{гс} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^8$, может выражаться в особых единицах—мюргах, причем один мюрг соответствует сопротивлению, преодолевая которое, перепад давления величиной $\Delta p = 10^{-3}$ мм вод. ст. создает циркуляцию расхода воздуха $Q = 1$ м³/сек.

Рассмотрим теперь, как получить сопротивление всей цепи (рис. 5-33), когда сопротивления ее элементов известны. Для всей цепи имеем $\Delta p_{\Sigma} = z_{\Sigma} Q^2$.

Поскольку потери давления на каждом участке $\Delta p_i = z_i Q_i^2 = z_i Q^2$, применение обобщенного уравнения Бернулли дает:

$$\Delta p_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \Delta p_i = \sum_{i=1}^n z_i Q^2,$$

где n — число участков.

Следовательно,

$$z_{\Sigma} Q^2 = \sum_{i=1}^n z_i Q^2 = Q^2 \sum_{i=1}^n z_i$$

или

$$z_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n z_i. \quad (5-45)$$

Таким образом, при последовательном соединении гидравлических сопротивлений суммарное сопротивление схемы замещения определяется, как для электрической цепи.

При разветвлении струи, т. е. при параллельном соединении сопротивлений (рис. 5-34), в силу нелинейности закона Аткинсона расчет суммарного сопротивления усложняется.

Из уравнения неразрывности для канала (§ 4-6) следует, что расход после слияния должен быть равен расходу до разветвления, т. е. общий расход составляет как сумма расходов в ответвлениях:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (5-46)$$

Так как давление в каком-либо данном сечении общего канала (например, перед разветвлением или после него) может иметь только одно значение, разность давлений на параллельных участках есть величина постоянная: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_i = \Delta p$.

Но $\Delta p_i = z_i Q_i^2$, откуда $Q_i = \sqrt{\frac{\Delta p_i}{z_i}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{z_i}}$.

Тогда в соответствии с (5-46) получим:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\Delta p}{z_i}}.$$

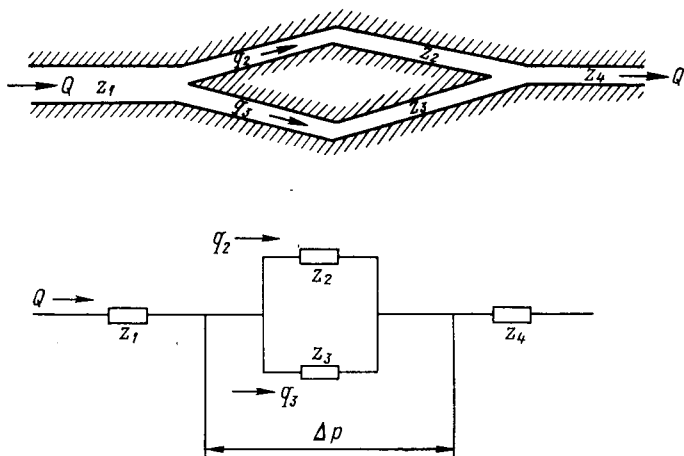


Рис. 5-34. Параллельное соединение сопротивлений

В то же время для всей цепи

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta p}{z_{\Sigma}}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{\Delta p}{z_{\Sigma}}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\Delta p}{z_i}}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{z_{\Sigma}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{z_i}}. \quad (5-47)$$

Последняя формула не находит аналогии в расчетах линейных электрических цепей, для которых $\frac{1}{R_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$. Из фор-

мулы (5-47) следует, что суммарное сопротивление двух параллельно соединенных элементов

$$z_{\Sigma} = \frac{z_1 z_2}{(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})^2} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + 2\sqrt{z_1 z_2} + z_2}. \quad (5-48)$$

В случае сложных разветвленных цепей, типичных для конструкций электрических машин, расчет суммарных гидравлических сопротивлений усложняется.

Глава шестая

ВЕНТИЛЯЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

6-1. Схемы вентиляции электрических машин

подавляющее большинство электрических машин охлаждается газом. В одних случаях газ, например воздух или водород, является единственной охлаждающей средой, в других он

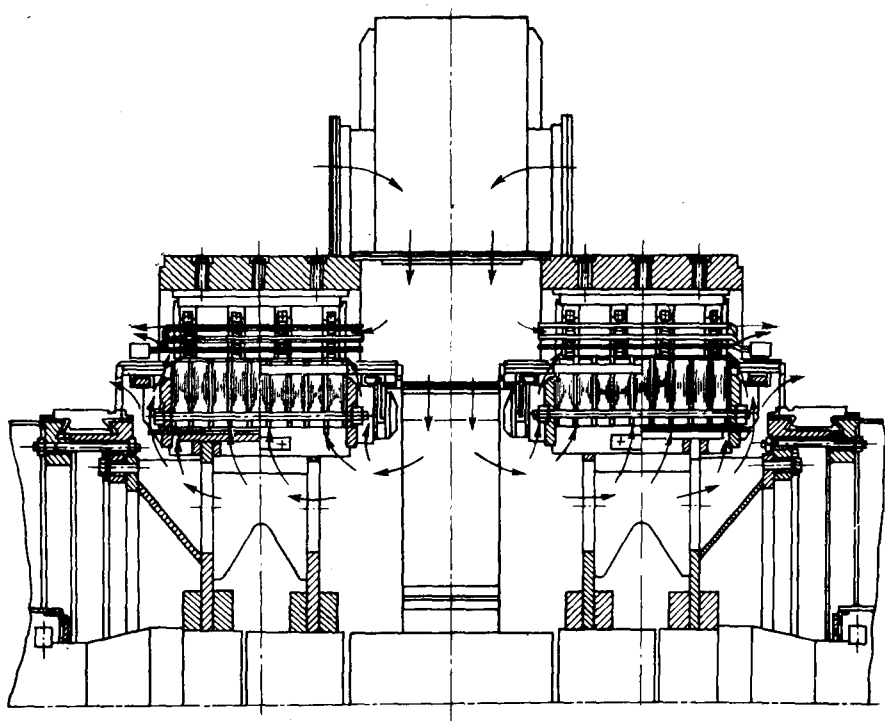


Рис. 6-1. Схема вентиляции крупной двухъякорной машины постоянного тока

применяется в комбинации с иными охлаждающими средами, например, водой или маслом. Правда, в крупных электрических машинах потери в конечном счете всегда отводятся водой, взятой из рек, водоемов или градирен. Однако природная вода,

циркулирующая в трубках газоохладителей, хотя и играет роль второго, кроме газа, теплоносителя, не является охлаждающей средой в прямом смысле, поскольку не соприкасается с активными зонами машины.

Таким образом, решающее значение в охлаждении большинства электрических машин имеет газ. От интенсивности и рациональности его циркуляции в каналах охлаждающих трактов зависят важнейшие свойства машины: термическая надежность (долговременность безаварийной эксплуатации), габаритные размеры и вес, коэффициент полезного действия и др. Охлаждающий газ циркулирует в каналах под воздействием источников избыточного давления.

Совокупность каналов охлаждающего тракта электрической машины и нагнетательных элементов — вентиляторов или компрессоров и вращающихся каналов — называется схемой вентиляции.

Различают электрические машины с принудительной вентиляцией (рис. 6-1), когда в качестве нагнетательных элементов применены посторонние, отдельно стоящие источники давления (чаще всего вентиляторы общепромышленного назначения), и машины с самовентиляцией (рис. 6-2), в которых необходимый избыток давления для циркуляции газа создается нагнетателями, установленными на валу ротора электрической машины.

В крупных электрических машинах принудительная вентиляция применяется крайне редко. Поэтому здесь будет дана классификация схем вентиляции применительно к машинам с самовентиляцией. Отдельные проблемы принудительной вентиляции будут рассмотрены в дальнейшем, когда речь пойдет о машинах соответствующего типа (гл. 17, 18).

Схемы вентиляции самовентилируемых машин подразделяются на два больших класса: схемы нагнетательные и схемы вытяжные. Нагнетательными называются такие схемы вентиляции (рис. 6-3), в которых охлаждающий газ по выходе из газоохладителя поступает в нагнетательные элементы (вентиляторы) и под воздействием избыточного давления нагнетается в каналы охлаждающего тракта активной зоны электрической машины.

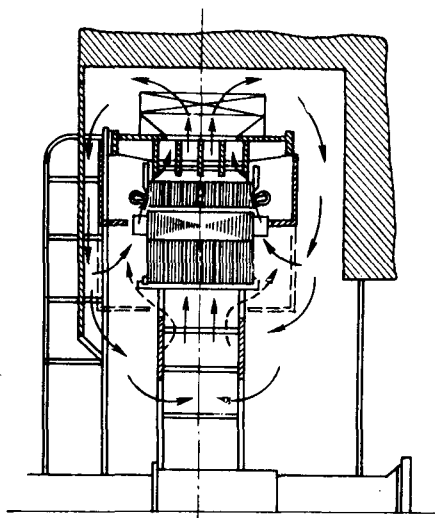


Рис. 6-2. Схема самовентиляции мощного гидрогенератора

Вытяжными называются такие схемы вентиляции (рис. 6-4), в которых охлаждающий газ по выходе из газоохладителя поступает в каналы охлаждающего тракта активной зоны электрической машины и затем втягивается нагнетателем под воздействием создаваемого им разрежения.

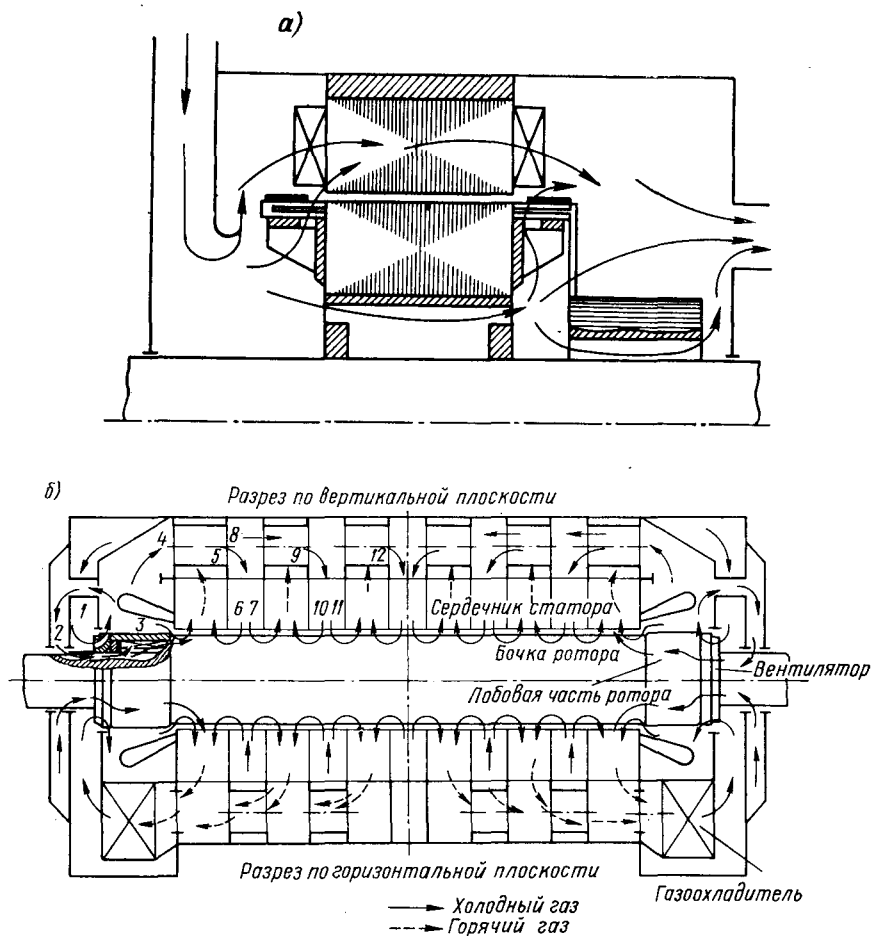


Рис. 6-3. Нагнетательные схемы вентиляции: а — осевая (машина постоянного тока); б — радиальная (турбогенератор)

Нагнетательные и вытяжные схемы могут быть одноструйными и многоструйными. Число струй в машине определяется числом независимых выходов подогретого газа в сборную зону перед нагнетателем. Например, схема вентиляции турбогенератора на рис. 6-3, б является шестиструйной.

Кроме того, следует различать схемы вентиляции радиальные, осевые, радиально-осевые и тангенциаль-

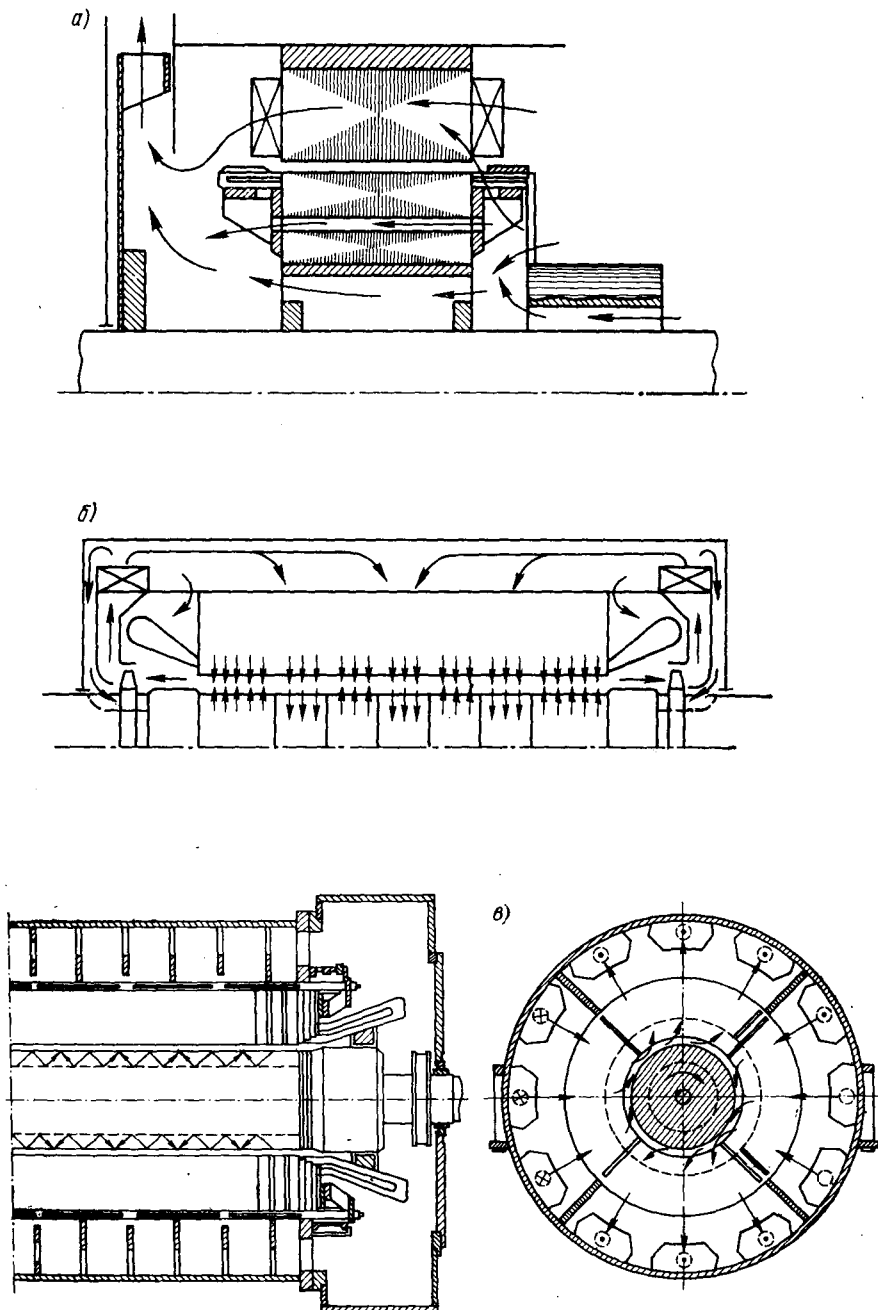


Рис. 6-4. Вытяжные схемы вентиляции: а — осевая (машина постоянного тока); б — радиальная (турбогенератор); в — тангенциальная (турбогенератор)

ные. Характер циркуляции охлаждающего газа в этих схемах ясен из их наименования и приведенных рисунков (рис. 6-4, 6-5).

Как мы увидим ниже, изменение схемы вентиляции может иногда решающим образом отразиться не только на картине циркуляции газа, но и на термических характеристиках электрической машины в целом.

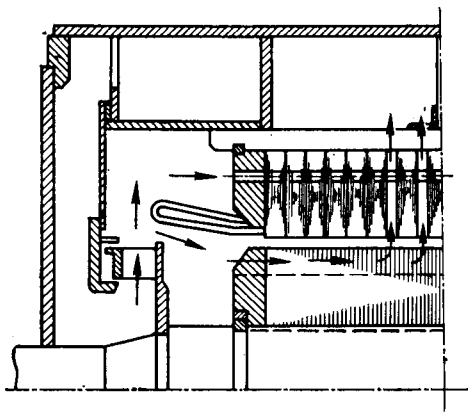


Рис. 6-5. Радиально-осевая схема вентиляции (высокочастотный генератор)

6-2. Задачи вентиляционного расчета электрической машины

Основной задачей вентиляционного расчета электрической машины является выбор схемы вентиляции в целом и, в частности, нагнетательных элементов, которые должны обеспечивать циркуляцию необходимого количества охлаждающей

среды в единицу времени или, иначе говоря, необходимую величину расхода среды.

Объемным расходом жидкости или газа (или для краткости просто расходом) называется объемное количество среды, проходящее в единицу времени через поперечное сечение данного канала. По отношению ко всей электрической машине это такое количество, которое проходит в единицу времени через поперечное сечение всех параллельных путей вентиляционного тракта либо через поперечное сечение подводящих (отводящих) патрубков.

Расход Q , $\text{м}^3/\text{сек}$ имеет простую связь с величиной средней скорости ω движения газа в канале: $Q = \omega s$, где s — поперечное сечение канала.

Таким образом, расход среды аналогичен току электрической цепи, а скорость, т. е. расход на единицу сечения канала, — плотности электрического тока.

Поскольку охлаждающий газ воспринимает потери электрической машины и сообщает их воде в газоохладителях, необходимый расход газа определяется величиной отводимых потерь, т. е. при проектировании машины — результатами электромагнитного и теплового расчетов. Таким образом, в пределах вентиляционного расчета номинальный расход Q_n является величиной заданной.

Циркулируя по каналам вентиляционного тракта машины, охлаждающий газ преодолевает сопротивление своему движению. Иными словами, чтобы обеспечить циркуляцию газа, не-

обходимо затратить механическую работу. Эту работу совершают нагнетательные элементы, которые создают разность давлений между входным и выходным сечениями вентиляционного тракта. Указанная разность давлений H носит название напора нагнетательных элементов и измеряется в единицах давления, т. е. в килограммах силы на квадратный метр ($кгс/м^2$). Поскольку этой единице соответствует давление водяного столба высотой в один миллиметр, ее часто заменяют другой единицей — миллиметром водяного столба ($мм вод. ст.$). При этом, естественно, $1 кгс/м^2 = 1 мм вод. ст.$

Любой участок вентиляционного тракта, равно как и любой участок отдельного вентиляционного канала, обладает сопротивлением, в связи с чем полное давление газа в конце участка всегда меньше, чем в его начале, на величину необратимых потерь давления, которые называют потерями напора и обозначают ΔH . Независимо от формы движения газа (т. е. и для ламинарного, и для турбулентного движений) потери напора вычисляют по формуле:

$$\Delta H = zQ^2, \quad (6-1)$$

которую нужно понимать следующим образом. В тех случаях движения, когда потери напора пропорциональны второй степени расхода, коэффициент пропорциональности z в формуле (6-1) есть величина постоянная. Если же указанная пропорциональность в действительности не соблюдается, коэффициент z должен быть взят таким, чтобы формула (6-1) оставалась справедливой.

Поскольку величина z для каждого вида аэродинамического сопротивления определяется не только размерами канала и свойствами среды, но и величиной коэффициента местного сопротивления ξ , последнее утверждение означает, что именно коэффициент местного сопротивления следует брать (например, из эксперимента) в соответствующей форме.

Физическая трактовка формулы (6-1), называемой законом Аткинсона, и входящих в нее величин дана в конце предыдущей главы. Там же отмечено, что коэффициент пропорциональности z , который называют аэродинамическим сопротивлением, определяется выражением

$$z = \xi \frac{\rho}{2s^2} \quad (6-2)$$

и измеряется в особых единицах — мюргах (§ 5-16).

Вернемся к вопросу о задачах вентиляционного расчета электрических машин. Как очевидно, выбор нагнетательных элементов машины, т. е. определение необходимой величины номинального напора вентиляторов H_n исходя из заданной вели-

чины номинального расхода Q_n может быть произведен на основе уравнения $H_n = \Delta H$ или

$$H_n = zQ_n^2, \quad (6-3)$$

где z — суммарное аэродинамическое сопротивление электрической машины.

Соблюдение этого равенства означает, что потери напора в машине как раз равны напору, развиваемому нагнетательными элементами, т. е. определяет факт равновесия.

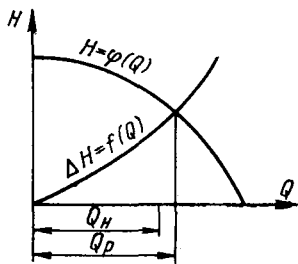
Таким образом, в вентиляционном расчете электрической машины должно быть определено ее аэродинамическое сопротивление z и решено уравнение равновесия (6-3). После этого может быть вычислено распределение расходов по отдельным ветвям схемы.*

6-3. Графическое решение уравнения равновесия

Расчет суммарного аэродинамического сопротивления составляет главное содержание вентиляционного расчета электрической машины. Ему будут посвящены специальные разделы настоящей и трех последующих глав. Пока же будем считать величину z известной. Тогда уравнение равновесия (6-3) должно быть по существу лишь проверено.

Действительно, по известной величине аэродинамического сопротивления z могут быть определены потери напора в машине $\Delta H_n = zQ_n^2$, которые затем нужно сравнить с номинальным напором вентиляторов H_n при данном расходе Q_n .

Рис. 6-6. Графическое определение рабочего расхода



Дело осложняется тем, что напор вентилятора является, как правило, сложной функцией расхода $H = \varphi(Q)$, которая называется аэродинамической характеристикой вентилятора. Аэродинамическая характеристика, полученная опытным путем либо пересчетом с модели, не всегда поддается достаточно простой аналитической записи. Поэтому и решение уравнения равновесия

$$\varphi(Q) = zQ^2 \quad (6-4)$$

в аналитической форме бывает затруднительным.

В практике проектирования электрических машин широко распространен графический метод решения уравнения (6-4).

* Задачей вентиляционного расчета является также определение вентиляционных потерь. Этой задаче посвящена гл. 10.

Здесь же следует иметь в виду, что понятие гидравлического к. п. д. для встроженных вентиляторов электрических машин лишено смысла.

Этот метод чрезвычайно прост и нагляден (рис. 6-6). На общем графике наносятся две функции расхода: $H = \varphi(Q)$ и $\Delta H = zQ^2$. Точка их пересечения является точкой равновесия, т. е. точкой взаимного соответствия потерь напора в машине и напора вентилятора.

В результате вентиляционного расчета рабочий расход Q_p никогда не бывает в точности равен номинальному расходу Q_n . Это происходит по двум причинам. С одной стороны, сложно подобрать нагнетательные элементы так, чтобы их характеристика пересекалась с кривой потерь напора именно в точке $Q_n, \Delta H_n$. С другой стороны, всегда имеют в виду, что и характеристика вентилятора, и кривая потерь напора определены с некоторыми погрешностями, что может привести к нежелательному уменьшению расхода газа в построенной машине по сравнению с необходимой величиной Q_n . В связи с этим выбор нагнетательных элементов производят с таким расчетом, чтобы рабочий расход Q_p был больше номинального примерно на 10%. Такой запас соответствует компенсации ошибки в определении потерь напора около 20%.

6-4. Проектирование центробежных нагнетателей

Теоретическое давление. Рассмотрим условия работы центробежного нагнетателя — вентилятора или компрессора — на сеть, которую в нашем случае представляет вентиляционный тракт электрической машины. Имея в виду, что физические основы центробежного течения и их математическая интерпретация будут достаточно подробно рассмотрены в гл. 8, посвященной движению среды в каналах роторов, дадим здесь лишь основные расчетные предпосылки, которые необходимо использовать при проектировании схемы вентиляции электрической машины.

Рассмотрим рис. 6-7.

На рисунке приведена диаграмма скоростей газа перед лопатками центробежного колеса и за ними. На диаграмме обозначены: c_1 — абсолютная скорость при входе на лопатки, м/сек; c_2 — абсолютная скорость при выходе из колеса, м/сек; u_1 — окружная скорость на диаметре входа на лопатки (переносная скорость), м/сек; u_2 — окружная скорость на наружном диаметре колеса, м/сек; c_{1u} — тангенциальная составляющая при входе

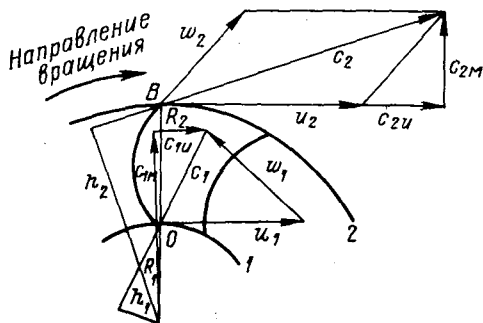


Рис. 6-7. Треугольники скоростей на входе и выходе колеса центробежного вентилятора

на лопатки, $m/сек$; c_{2u} — тангенциальная составляющая при выходе из колеса, $m/сек$; w_1 — относительная скорость газа при входе, $m/сек$; w_2 — относительная скорость газа при выходе, $m/сек$.

Применим к движению в межлопаточном канале так называемую теорему моментов количества движения: *в установившемся движении изменение момента количества движения секундной массы жидкости при переходе от одного сечения трубки тока к другому равно моменту внешних сил, приложенных к потоку между этими сечениями.*

Внешние силы в колесе центробежного нагнетателя прилагаются к потоку при помощи системы лопаток. Отсюда следует, что нужно рассмотреть изменение секундной массы при переходе от входного сечения межлопаточного канала, т. е. сечения перед входом, к выходному, т. е. сечению после выхода.

Масса газа, протекающая через межлопаточные каналы за 1 сек, равна плотности ρ , умноженной на расход Q , и одинакова для обоих сечений. Количество движения на входе равно $\rho Q c_1$, на выходе $\rho Q c_2$. Момент количества движения равен произведению количества движения на плечо, т. е. его изменение

$$\Delta M = \rho Q c_2 h_2 - \rho Q c_1 h_1, \quad (6-5)$$

где h_1 и h_2 — плечи абсолютных скоростей c_1 и c_2 .

Заметим, что значение абсолютной скорости в любом сечении канала может быть получено путем геометрического сложения векторов относительной и переносной скоростей. Разложим вектор абсолютной скорости на составляющие в радиальном направлении c_R и в тангенциальном направлении c_u . Тогда из подобия треугольников с общими вершинами в точке O и в точке B следует: $c_1 h_1 = R_1 c_{1u}$ и $c_2 h_2 = R_2 c_{2u}$. Отсюда

$$\Delta M = \rho Q (R_2 c_{2u} - R_1 c_{1u}). \quad (6-6)$$

Выражение (6-6) по существу формулирует теорему моментов количества движения. Однако для практического применения его следует несколько преобразовать. Умножим обе части (6-6) на угловую скорость ω . Тогда слева получим мощность, затраченную на передачу энергии газу $\Delta M \omega$, $кас \cdot m/сек$. Эта мощность равна в то же время произведению QH_T (H_T — давление или напор, развиваемый нагнетателем), поскольку давление есть энергия жидкости, отнесенная к единице расхода (§ 4-7). Таким образом слева (6-6) имеем QH_T .

Умножение правой части (6-6) на ω дает значения окружных скоростей на входе и на выходе: $u_1 = \omega R_1$, $u_2 = \omega R_2$. Следовательно,

$$QH_T = \rho Q (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u})$$

или

$$H_T = \rho (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}). \quad (6-7)$$

Полученное соотношение называется турбинным уравнением Эйлера или основным уравнением лопастных машин.

Поскольку первое контрольное сечение было взято перед входом на лопатки, тангенциальная составляющая c_{1u} абсолютной скорости c_1 может быть создана каким-либо внешним источником (например, направляющим аппаратом), но не самим вентилятором. В конструкциях электрических машин устройства, осуществляющие так называемое предварительное закручивание потока перед входом в колесо вентилятора, как правило, отсут-

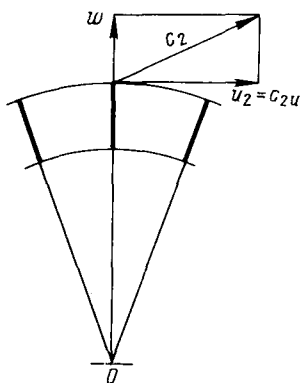


Рис. 6-8. Лопатки с радиальным выходом

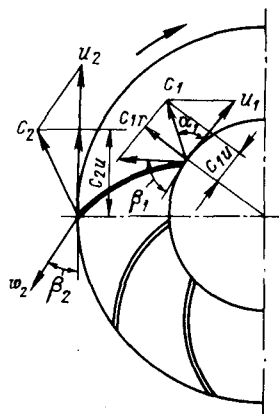


Рис. 6-9. Центробежный вентилятор с лопатками, загнутыми назад

ствуют. Поэтому для центробежных нагнетателей электрических машин формула Эйлера (6-7) приводится к простейшему виду:

$$H_T = \rho u_2 c_{2u}, \quad (6-8)$$

где H_T — теоретический напор (полный) вентилятора.

Как видно из последней формулы, зависимость теоретического напора от конструкции вентилятора определяется величиной тангенциальной составляющей абсолютной скорости на выходе из колеса c_{2u} . Например, при радиальном расположении лопаток на выходе (рис. 6-8) $c_{2u} = u_2$ и $H_T = \rho u_2^2$.

Если угол между радиусом и вектором относительной скорости на выходе образован в направлении вращения, то говорят о вентиляторе с загнутыми вперед лопатками (рис. 6-7). Если упомянутый угол приходится отсчитывать против направления вращения, то лопатки вентилятора называются загнутыми назад (рис. 6-9). В расчетах удобно пользоваться значением угла β_2 между относительной скоростью и касательной к окружности. Как очевидно,

$$c_{2u} = u_2 \pm \omega_2 \cos \beta_2, \quad (6-9)$$

где знак плюс относится к лопаткам, загнутым вперед. Таким образом, колеса с загнутыми вперед лопатками обладают наибольшим теоретическим напором. Формула (6-9) для тангенциальной составляющей скорости позволяет проследить зависимость теоретического напора вентиляторов разного типа от расхода.

Если учесть, что величина относительной скорости w в большой мере определяется величиной расхода (в первом приближении эти величины можно считать пропорциональными, полагая $w = Q/s$, где s — условное сечение межлопаточного канала), то из уравнения (6-8) с учетом формулы (6-9) получим:

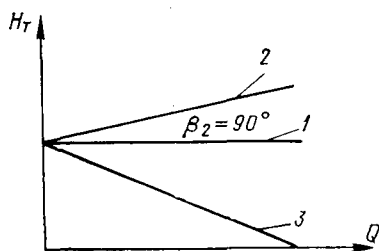


Рис. 6-10. Зависимость теоретического напора от расхода

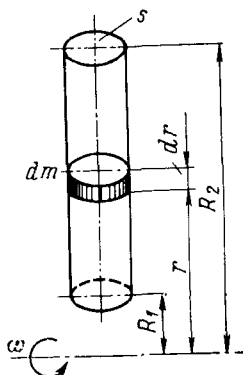


Рис. 6-11. Приращение давления в относительном движении

а) для вентилятора с радиальными лопатками аэродинамическая характеристика не зависит от расхода (рис. 6-10, график 1);

б) для вентилятора с загнутыми вперед лопатками характеристика монотонно возрастает (рис. 6-10, график 2);

в) для вентилятора с загнутыми назад лопатками характеристика монотонно убывает (рис. 6-10, график 3).

Внешняя аэродинамическая характеристика. Реальный напор H , создаваемый центробежным нагнетателем во внешней сети, всегда меньше теоретического на величину потерь напора в самом нагнетателе при каждом данном значении расхода. При этом надо иметь в виду, что теоретический напор H_T в любой точке характеристики равен его значению по формуле Эйлера, но во внешней сети может быть использован лишь его избыток по отношению к внутренним потерям, равный H . Таким образом, теоретический напор центробежного вентилятора аналогичен э. д. с. электрического генератора, напор во внешней сети аналогичен напряжению электрического генератора.

Для получения так называемой внешней аэродинамической характеристики необходимо при каждом

значении расхода из величины теоретического напора вычесть величину потерь напора в вентиляторе.

Прежде всего следует классифицировать потери давления, разделив их на три принципиально отличные друг от друга категории:

а) потери, связанные с конечностью размера радиуса входа, т. е. с тем, что вход осуществляется не на оси вращения, а на радиусе r при окружной скорости $u = \omega r$;

б) необратимые потери торможения струи после выхода, связанные с тем, что динамическое давление (скоростной напор) после выхода не может быть полностью преобразовано в статическое давление даже при наличии спрямляющего аппарата;

в) потери давления в самом колесе, т. е. потери входа в межлопаточные каналы, потери от изменения формы струи в межлопаточном канале, потери трения, потери энергии на образование присоединенных вихрей и потери выхода.

Учет первой категории потерь весьма прост. Их величина строго равна давлению $\frac{1}{2} \rho u_1^2$. В самом деле, суммарное приращение давления в колесе p_{τ} , или в терминах теории вентиляторов приращение напора H_{τ} , в абсолютном движении складывается из приращения в переносном движении и приращения в относительном движении.

В относительном движении газа в межлопаточном канале, т. е. в движении относительно системы координат, которая вращается вместе с вентилятором, приращение энергии происходит в поле центробежных сил (рис. 6-11) и равно:

$$p_{\text{ц}} = \frac{c}{s} = \frac{1}{s} \int_{R_1}^{R_2} dc = \frac{1}{s} \int_{R_1}^{R_2} \omega^2 r \rho s dr = \frac{\rho}{2} \omega^2 (R_2^2 - R_1^2) = \\ = \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2), \quad (6-10)$$

где c — центробежная сила; $\rho s dr$ — элемент массы газа; ω — угловая скорость вращения.

Поскольку радиус входа R_1 не равен нулю, часть центробежного давления $h_{\text{ц}} = \frac{\rho}{2} u_1^2$ всегда необратимо теряется. Эти потери можно понимать как потери, связанные с перемещением частицы газа из точки поля с нулевым потенциалом в точку поля с потенциалом $\frac{\rho}{2} u_1^2$ (частица приобрела энергию поля в данной точке, но точно эта величина энергии оказалась необратимо затраченной).

Вторая категория потерь может быть учтена введением коэффициента восстановления статического

давления выхода K . Представим теоретическое давление в следующем виде:

$$H_T = \rho u_2 c_{2u} = \rho u_2 (u_2 \pm \omega_2 \cos \beta_2) = \\ = \rho u_2^2 \pm \rho u_2 \omega_2 \cos \beta_2 = \frac{\rho}{2} u_2^2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 \pm \rho u_2 \omega_2 \cos \beta_2. \quad (6-11)$$

В соответствии со сказанным выше первый член правой части (6-11) определяет теоретическое давление центробежных сил, т. е. давление в относительном движении. Второй член уравнения есть динамическое давление переносного движения, которое в той или иной мере может быть преобразовано в статическое давление (например, в диффузоре после колеса или спрямляющем аппарате). Третий член представляет долю, на которую может быть увеличено или уменьшено динамическое давление в зависимости от угла наклона лопаток на выходе. Поэтому к нему также может быть применено понятие восстановления статического давления.

Таким образом, восстанавливаемая величина статического давления есть

$$K \left(\frac{\rho}{2} u_2^2 \pm \rho u_2 \omega_2 \cos \beta_2 \right),$$

где K — коэффициент восстановления. Отсюда необратимые потери торможения

$$h_{\text{дин}} = (1 - K) \left(\frac{\rho}{2} u_2^2 \pm \rho u_2 \omega_2 \cos \beta_2 \right).$$

Перейдем к рассмотрению третьей категории необратимых потерь давления в центробежном колесе.

В практике проектирования электрических машин наиболее удобно определять потери в вентиляторе формально так же, как и в других каналах вентиляционного тракта машины, т. е. с использованием формулы Аткинсона $\Delta H = zQ^2$, в которой вся сложность физических взаимодействий должна быть учтена величиной коэффициента аэродинамического сопротивления $z = f(Q)$, т. е. формулу Аткинсона следует записывать в виде $\Delta H = z(Q)Q^2$. Такой подход позволяет рассматривать вентилятор в общей схеме вентиляции электрической машины как элемент, создающий напор H_T и потребляющий при каждом значении расхода напор zQ^2 . Таким образом, методы вентиляционного расчета электрической машины оказываются независимыми от того, есть ли вентилятор в какой-либо произвольной ветви схемы вентиляции.*

* Приведенный способ записи оказывается особенно удобным при использовании для вентиляционных расчетов вычислительных машин — аналоговых и цифровых. Все последующие выкладки произведены с учетом этого обстоятельства.

Итак, будем считать выражение

$$H = H_T - h_{ц} - h_{дин} - zQ^2 \quad (6-12)$$

уравнением внешней аэродинамической характеристики центробежного вентилятора. Из уравнения видно, что реальное внешнее давление никогда не равно теоретическому, так как составляющие $h_{ц}$ и $h_{дин}$ не равны нулю. Поэтому величина теоретического напора H_T не может быть измерена в опыте.

Турбинное уравнение Эйлера (6-7) позволяет определить энергию или, как говорят, работу каждой единицы массы газа, воспринятую с вала нагнетателя и повышающую теплосодержание газа; она вполне может быть измерена в опыте (см. § 5-9). Но приращение полного давления газа, или в терминах теории вентиляторов полного напора, не равно теоретическому давлению. Если осуществить вход по оси ($R_1=0$), то составляющая $h_{ц}$ пропадет. Но режим $Q=0$ практически недостижим, так как в межлопаточных каналах при закрытии выхода возникает вихревое движение. Если же дать Q хотя бы малое приращение, то возникают необратимые потери zQ^2 , коэффициент z которых тем больше, чем меньше Q (см. гл. 8).

Потери энергии в вентиляторах будут исследованы в гл. 10, посвященной затратам мощности на охлаждение.

Универсальная аэродинамическая характеристика центробежных вентиляторов электрических машин. Рассмотрим уравнение внешней аэродинамической характеристики центробежного вентилятора (6-12):

$$H = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + K \left(\frac{1}{2} \rho u_2^2 \pm \rho u_2 \omega_2 \cos \beta_2 \right) - \frac{1}{2} \rho u_1^2 - z(Q) Q^2. \quad (6-13)$$

Заметим, что значения коэффициента восстановления статического давления K определяются конструкцией электрической машины. Приведем типичные значения коэффициента восстановления, полученные путем обработки многочисленных экспериментальных данных для разного типа конструкций:

Со спрямляющим аппаратом после вентилятора	0,6
С диффузором после вентилятора	0,3
При наличии камеры в щитах после вентилятора	0,2
При выходе на лобовую часть обмотки статора или в зазор	0,1

Для придания уравнению (6-13) универсальной формы перепишем его в относительных единицах. Для этой цели разделим левую и правую части уравнения на величину ρu_2^2 . Получим

$$\frac{H}{\rho u_2^2} = 0,5 \left(1 - \frac{u_1^2}{u_2^2} \right) + K \left(0,5 \pm \frac{\omega_2}{u_2} \cos \beta_2 \right) - \frac{zQ^2}{\rho u_2^2}. \quad (6-14)$$

Введем следующие обозначения:

а) относительный напор

$$H^* = \frac{H}{\rho u_2^2};$$

б) относительный расход

$$Q^* = \frac{Q}{\pi D_2 b_2 u_2} = \frac{Q}{s_2 u_2} = \frac{w_2}{u_2};$$

в) относительный радиус

$$r^* = \frac{R_1}{R_2} = \frac{u_1}{u_2}.$$

Запишем теперь аэродинамическое сопротивление вентилятора в общепринятой для гидравлических сопротивлений форме $z = \xi \frac{\rho}{2s_2^2}$, где ξ — суммарный коэффициент местных сопротивлений вентилятора.

Уравнение (6-14) с учетом приведенных обозначений приобретает вид:

$$H^* = 0,5(1 - r^{*2}) + K(0,5 \pm Q^* \cos \beta_2) - 0,5\xi Q^{*2}. \quad (6-15)$$

Опыт исследования встроженных* центробежных вентиляторов электрических машин, включающий эксперименты с машинами разных типов — от асинхронных двигателей до мощных турбогенераторов — позволяет принять для коэффициента сопротивления величину $\xi = 2r^{*2}$. При этом следует иметь в виду, что коэффициент сопротивления лопаточного канала при уменьшении относительного радиуса r^* , т. е. при увеличении длины лопатки, на самом деле несколько увеличивается (весьма, впрочем, незначительно). Но в формуле внешней характеристики меньшей величине r^* должна соответствовать большая реализуемая величина Q^* , что формально выражается уменьшением коэффициента перед величиной Q^{*2} (условное уменьшение потерь давления).

Таким образом окончательно получаем:

$$H^* = 0,5(1 - r^{*2}) + K(0,5 \pm Q^* \cos \beta_2) - r^{*2} Q^{*2}. \quad (6-16)$$

Уравнение в относительных единицах (6-16) называется универсальной внешней аэродинамической характеристикой встроженных центробежных вентиляторов электрических машин.

При использовании универсальной характеристики для нужд практического проектирования следует учитывать, что она базируется на некоторых типичных для электрических машин геометрических соотношениях и не может учитывать всех конкретных особенностей конструкции каждого данного вентилятора. Поэтому полезно дополнительно иметь в виду обобщающие

* Т. е. установленных на валу самой электрической машины.

экспериментальные зависимости напора от числа лопаток вентилятора и их длины. На рис. 6-12 приведены соответствующие кривые по данным В. И. Виноградова [12].

Окончательным подтверждением правильности выбора вентилятора может служить лишь результат вентиляционных испытаний головного образца проектируемой электрической машины.

Расчет аэродинамических характеристик на основе моделирования. При применении принудительной вентиляции и в отдельных случаях проектирования встроенных вентиляторов используют результаты экспериментального определения аэродинамических характеристик на модельных установках.

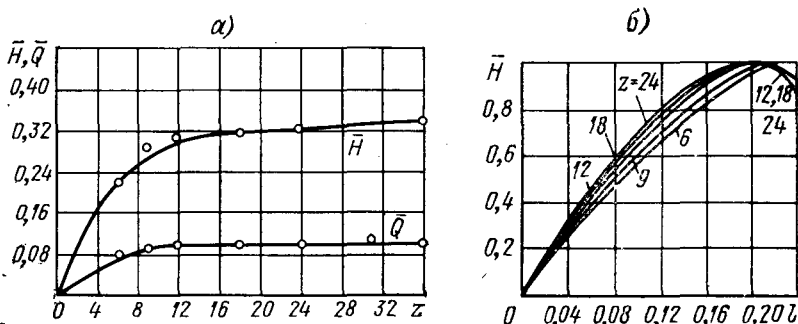


Рис. 6-12. Зависимость напора встроенных центробежных вентиляторов от числа лопаток (а) и их длины (б)

Перерасчет экспериментальных характеристик на натурные размеры проектируемых вентиляторов производится при соблюдении геометрического подобия модели и натуре. Для этой цели все размеры модельного вентилятора выражаются как доли наружного диаметра колеса. Что же касается характеристик, то им придается универсальная безразмерная форма.

Рассмотрим в качестве примера аэродинамическую схему и экспериментальные характеристики [59] часто применяемого вентилятора с загнутыми вперед лопатками (рис. 6-13). Для пересчета на натурные условия необходимо снятые с графиков безразмерные коэффициенты напора, расхода и мощности домножить на функции размеров колеса, которые применялись при построении характеристик модели:

$$H = H^* \rho u_2^2, \text{ кгс/м}^2;$$

$$Q = Q^* \frac{\pi D_2^2}{4} u_2, \text{ м}^3/\text{сек};$$

$$N = N^* \frac{\rho u_2^3 \frac{\pi D_2^2}{4}}{102}, \text{ квт.}$$

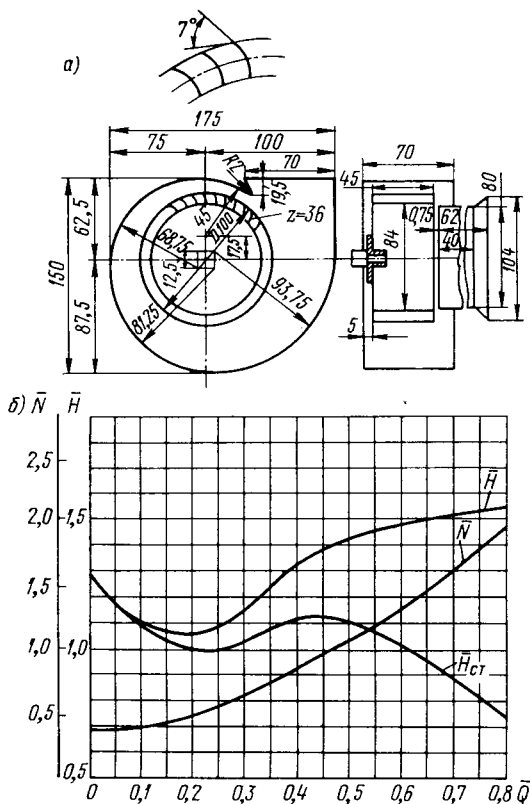


Рис. 6-13. Аэродинамическая схема (а) и безразмерные характеристики (б) центробежного вентилятора внешней установки

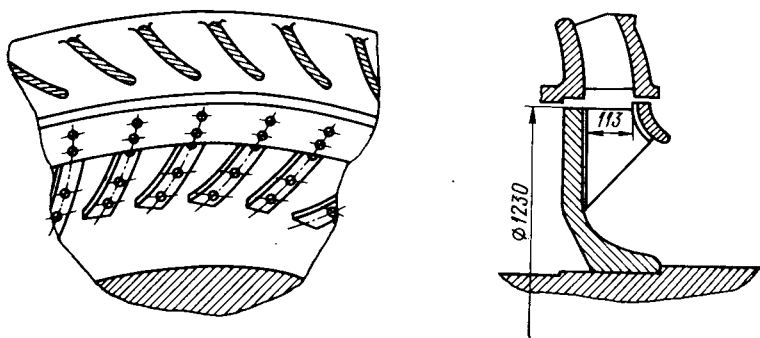


Рис. 6-14. Центробежный компрессор с загнутыми назад лопатками

Следует иметь в виду, что в вентиляционном расчете электрических машин при определении точки равновесия, т. е. точки пересечения внешней характеристики вентилятора и кривой потерь напора в машине, всегда лучше использовать характеристику статического напора вентилятора, имея в виду, что динамический напор на выходе из вентилятора, как правило, не может быть использован.

Расчет центробежных компрессоров. Компрессорами принято называть центробежные нагнетатели с избыточным статическим напором, превышающим 1000 мм вод. ст. В практике отечественного турбогенераторостроения применяются компрессоры одноступенчатого исполнения. Разработка компрессоров всегда предполагает исследование модельных экземпляров с последующей корректировкой конструкции.

Наиболее широкое распространение получили компрессоры двух типов. Аэродинамическая схема первого из них приведена на рис. 6-14. Это компрессор

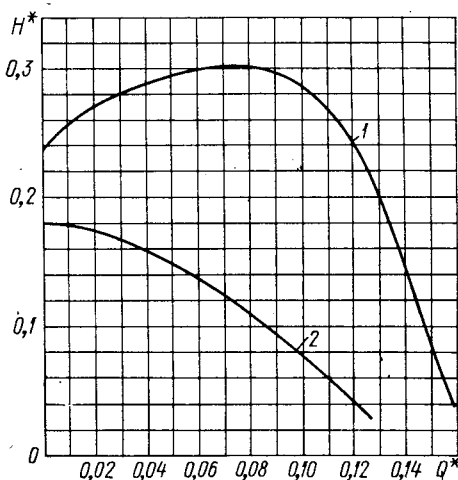


Рис. 6-15. Внешняя аэродинамическая характеристика компрессора
1 — при наличии спрямляющего аппарата; 2 — без спрямляющего аппарата

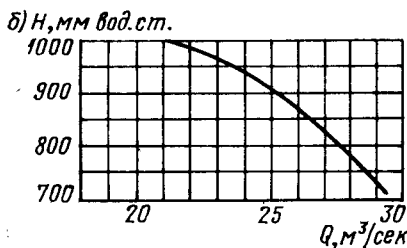
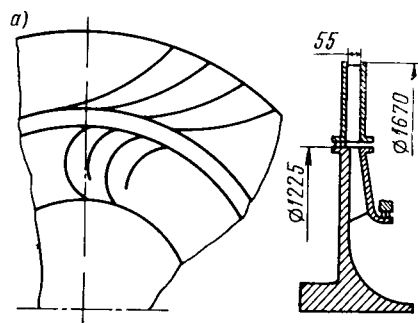


Рис. 6-16. Центробежный компрессор с загнутыми вперед лопатками; а — аэродинамическая схема; б — внешняя характеристика

сор с лопатками, загнутыми назад, угол $\beta_2 = 75^\circ$. Характеристики статического напора при использовании спрямляющего аппарата и без него показаны на рис. 6-15. Пересчет характеристик на иные размеры компрессора следует производить при условии строгого

соблюдения геометрического подобия, включая кривизну опорных поверхностей лопаток.

Схема компрессора с лопатками, загнутыми вперед, изображена на рис. 6-16. На этом же рисунке дана кривая статического напора в случае использования спрямляющего аппарата.

6-5. Проектирование осевых вентиляторов

Осевыми называются вентиляторы с направлением градиента давления и направлением движения массы газа вдоль оси вращения (рис. 6-17). В первом приближении такое движение можно считать цилиндрическим или осесимметричным.

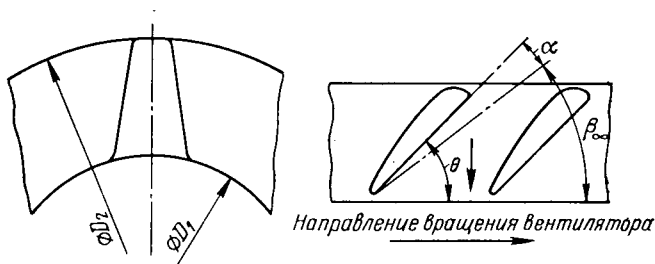


Рис. 6-17. Аэродинамическая схема осевого вентилятора

Для определения теоретического давления осевого вентилятора применимо выведенное в предыдущем параграфе основное уравнение для лопастных машин (6-7), которое в данном случае несколько упрощается, так как окружная скорость на входе в колесо и выходе из него одна и та же, т. е.

$$H_T = \rho u_2 (c_{2u} - c_{1u}). \quad (6-17)$$

Однако физическое существо изменения полного давления в случае осевого вентилятора совсем иное. Отсутствие радиального перемещения потока исключает действие центробежных сил, поэтому приращение давления происходит только за счет преобразования кинетической энергии.

Природа возникновения избыточного давления за колесом или, что то же, сообщения газу работы за счет механической энергии вала, тесно связана с понятием циркуляции скорости вокруг винтового профиля.

Рассмотрим диаграмму сил, приложенных к пластинке, плоскость которой наклонена на угол α к плоскости вектора скорости w_∞ набегающего потока газа (рис. 6-18). Угол α будем называть углом атаки. Как было показано в § 5-4, при таком движении к сопротивлению трения прибавляется сопротивление давления, вызванное образованием вихря позади пла-

стинки, или в более общем смысле, изменением поля давлений в массе газа, окружающего пластинку.

Если пластинка имеет большую длину в перпендикулярном плоскости чертежа направлении и угол атаки мал, то результирующая сил сопротивления имеет лишь небольшую составляющую вдоль движения (лобовое сопротивление) и значительную составляющую, перпендикулярную вектору скорости в его плоскости (подъемная сила). Исследования показали, что максимальное отношение подъемной силы к лобовому сопротивлению (это отношение называется качеством крыла или качеством профиля лопадки) свойст-

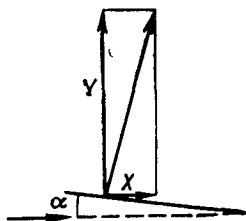


Рис. 6-18. Действие потока газа на наклонную пластинку

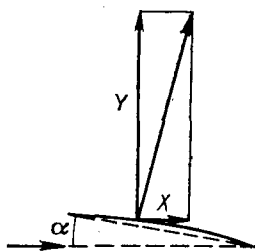


Рис. 6-19. Пластинка, изогнутая по силовой линии поля

венно профилю, изогнутому по линии тока, т. е. пластинке, изогнутой в виде дужки (рис. 6-19). Наилучшим аэродинамическим качеством обладают крыловые профили лопаток (рис. 6-17).

Тот факт, что увеличение качества профиля можно считать эквивалентным повышению напора вентилятора, представляется очевидным, если иметь в виду, что подъемная сила вызывает полезное приращение давления, в то время как лобовое сопротивление приводит к затратам энергии.

Из уравнения теоретического давления осевого вентилятора (6-17) следует, что для его определения нужно знать разность $c_{2u} - c_{1u}$ или при отсутствии предварительного закручивания газа перед колесом ($c_{1u} = 0$) значение составляющей

$$H_T = \rho u_2 c_{2u}. \quad (6-18)$$

Искомое значение c_{2u} входит в выражение циркуляции скорости вокруг профиля лопадки

$$\Gamma = \oint c dr = 2\pi r c_{2u}.$$

Отсюда $c_{2u} = \Gamma / 2\pi r$, т. е.

$$H_T = \frac{\rho u_2 \Gamma}{2\pi r} = \frac{\rho \omega \Gamma}{2\pi}. \quad (6-19)$$

Таким образом, величина теоретического напора может считаться известной, если известно значение циркуляции Γ .

Циркуляционное движение вокруг профиля возникает в связи с образованием вихревой зоны за профилем. В первый отрезок времени после начала движения вихрь, образующийся на задней кромке, уносится потоком вдоль по течению. Но уже через некоторое время, когда движение (относительно системы координат, неподвижной по отношению к профилю) становится стационарным, организуется циркуляция. Направление циркуляционного течения всегда такое (рис. 6-20), что его скорость увеличивает скорость набегающего потока над профилем (в плоскости чертежа) и уменьшает ее под профилем, где в связи с этим возрастает давление.

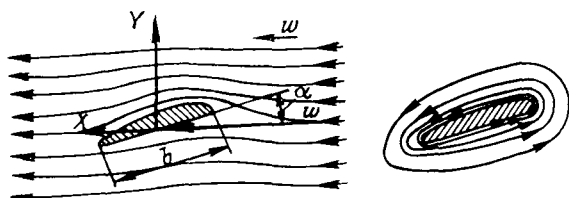


Рис. 6-20. Крыловой профиль в потоке газа

Величина циркуляции Γ выражается через величину скорости набегающего потока газа w_∞ только в простейшем случае бесконечно длинной прямой пластинки:

$$\Gamma = \pi b |w_\infty| \sin \beta_\infty, \quad (6-20)$$

где b — ширина пластинки; β_∞ — угол наклона вектора скорости w_∞ к плоскости пластинки.

Следует сразу же подчеркнуть, что попытки вычисления теоретического напора осевых вентиляторов на основе определения циркуляции по формулам, аналогичным (6-20), не дали положительного результата. Причина несостоятельности так называемой вихревой теории осевых вентиляторов не только в приближенности формул для расчета циркуляции, но и в неопределенности угла β_∞ , который в случае вентиляторов зависит от весьма многих факторов, не поддающихся учету.

Указанные обстоятельства побуждают исследователей определять теоретический напор вне зависимости от циркуляционных свойств профилей, используя указанные свойства лишь для расчета сопротивления колес. Практическое распространение приобрели методы расчета, в которых характеристики вентиляторов определяются основными влияющими параметрами: формой профиля, числом лопаток, углом установки лопаток и их длиной.

Богатый экспериментальный материал по встроенным осевым вентиляторам электрических машин [6] позволяет рассчи-

тывать аэродинамические характеристики вентиляторов на основе безразмерной зависимости следующего вида:

$$H^* = 0,2 \frac{10 + 2 \sin \theta}{10 + \tau} + 0,5Q^* \frac{1}{0,1v\tau\delta \frac{0,3 + \delta}{0,3 - \delta} \sin \theta} Q^{*2}. \quad (6-21)$$

Здесь $H^* = \frac{H}{\rho u_2^2}$ — относительный напор; $Q^* = \frac{Q}{\pi/4 (D_2^2 - D_1^2) u_2} = \frac{c_a}{u_2}$ — относительный расход; c_a — осевая составляющая скорости; θ — угол установки лопатки (см. рис. 6-17); v — ка-

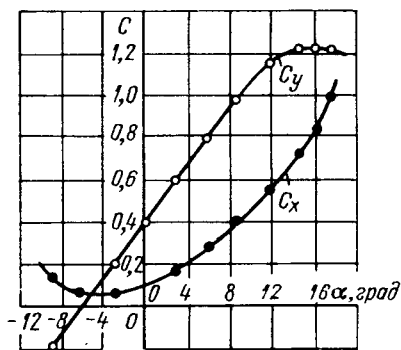


Рис. 6-21. Зависимость коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления от угла атаки

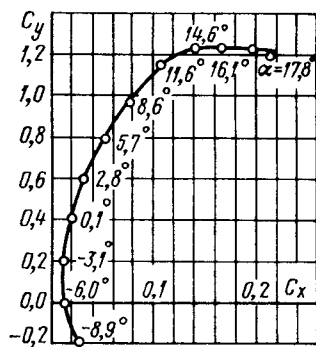


Рис. 6-22. Поляры для определения качества профиля при разных углах атаки

чество профиля; $\tau = \frac{\pi D_{ср}}{z b}$ — относительный шаг; $D_{ср}$ — средний диаметр, z — число лопаток; b — ширина лопатки (хорда) на среднем диаметре; $\delta = \frac{\delta_{макс}}{b}$ — относительная толщина профиля.

По аналогии с уравнением для центробежных вентиляторов назовем безразмерное уравнение (6-21) универсальной внешней аэродинамической характеристикой встроенных осевых вентиляторов электрических машин.

Для практического использования универсальной характеристики следует дополнительно иметь в виду следующие обстоятельства. Качество профиля ν , равное отношению коэффициента подъемной силы C_y к коэффициенту лобового сопротивления C_x , зависит от формы профиля и угла атаки α , т. е. угла между хордой профиля и направлением вектора скорости набегающего потока ω_∞ . Качество определяется при продувках профилей в аэродинамических трубах и представлено для каждого иссле-

дованного профиля в виде графиков $C_y=f_1(\alpha)$ и $C_x=f_2(\alpha)$ (рис. 6-21). Часто эти же данные представляют в форме так называемой поляры (рис. 6-22), т. е. зависимости $C_y=\varphi(C_x)$, в которой угол атаки (величина, задаваемая в практике весьма приближенно) использован в качестве параметра.

В тех случаях проектирования, когда качество профиля ν предварительно не определено, например при использовании дужек, следует принимать его ориентировочно по данным для геометрически близких профилей.

Особо необходимо учитывать, что универсальная характеристика дает тем более надежный результат, чем ближе проектируемый вентилятор к типичной конструкции. Это означает, что при применении, например, в качестве лопаток прямых пластинок, величина δ не равна нулю, но должна быть принята условно равной 0,08—0,10. Точно так же не следует применять универсальную характеристику при углах установки θ , близких к нулю, либо к 90° .

В других случаях, когда конструкция вентилятора близка к типичной, целесообразно иметь в виду экспериментальные данные по зависимостям аэродинамических свойств вентиляторов от угла установки, числа лопаток и их длины [12].

6-6. Пример расчета вентиляторов

Пусть для охлаждения крупного синхронного двигателя, аэродинамическое сопротивление которого $z=0,9 \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^3$, требуется обеспечить суммарный расход воздуха $Q_n=8,5 \text{ м}^3/\text{сек}$. Скорость вращения ротора $n=375 \text{ об/мин}$. Наружный диаметр центробежного вентилятора из соображений рациональной компоновки машины может быть принят не более $D_2=2,6 \text{ м}$. Выход воздуха осуществляется на лобовые соединения обмотки статора.

Принимая длину лопатки $l=0,25 \text{ м}$ и ширину $b=0,12 \text{ м}$, получим: $u_2=51 \text{ м/сек}$; $r^*=\frac{D_2-2l}{D_2}=0,807$; $Q=51,9 Q^*$; $H=318 H^*$. Если теперь

для повышения напорности принять аэродинамическую схему вентилятора с загнутыми вперед лопатками, с углом выхода $\beta_2=40^\circ$, то внешняя характеристика будет определяться уравнением:

$$H^* = 0,5 (1 - 0,807^2) + 0,1 (0,5 + Q^* \cdot 0,766) - 0,807^2 Q^{*3} .$$

Характеристика в размерных величинах приведена на рис. 6-23, она пересекается с кривой потерь напора zQ^2 . Как видно из рисунка, рабочий расход (для центробежного вентилятора) $Q_{p.центр}=9 \text{ м}^3/\text{сек}$, т. е. несколько превышает необходимый номинальный расход. Этот результат подтвержден опытным путем при вентиляционных испытаниях двигателя.

Представляет интерес сопоставление полученных результатов с результатами применения осевого вентилятора, который, вообще говоря, обладает меньшими напорными возможностями.

Пусть по-прежнему $D_2=2,6 \text{ м}$. Длину лопатки примем $l=0,145 \text{ м}$. Число лопаток $z=40$; ширина лопатки на среднем диаметре $b=0,132$; относительная толщина профиля $\delta=0,119$; качество профиля $\nu=20$; угол установки $\theta=40^\circ$.

* Сопротивление и расход даны в расчете на полмашины, т. е. на один вентилятор, с учетом симметричной компоновки схемы вентиляции.

Тогда получим: $\tau=1,455$; $Q=57 Q^*$; $H=318 H^*$. Уравнение внешней характеристики имеет вид:

$$H^* = 0,2 \frac{10 + 2 \cdot 0,643}{10 + 1,455} + 0,5 Q^* - \frac{1}{0,1 \cdot 20 \cdot 0,119 \frac{0,3 + 0,119}{0,3 - 0,119} 0,643} Q^{*2}.$$

В размерных величинах характеристика приведена на рис. 6-23. Она пересечена с кривой потерь (4), которая теперь в связи с изменением схемы

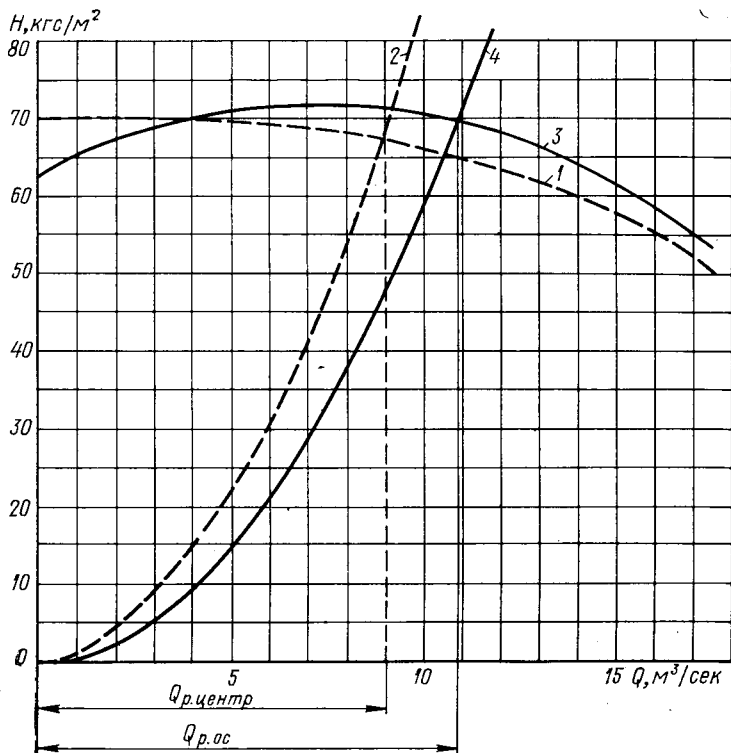


Рис. 6-23. Результаты вентиляционного расчета синхронного двигателя

1 — внешняя характеристика центробежного вентилятора; 2 — потери напора в сети с центробежным вентилятором; 3 — внешняя характеристика осевого вентилятора; 4 — потери напора в сети с осевым вентилятором

вентиляции (другой тип вентилятора) имеет коэффициент аэродинамического сопротивления $z=0,6 \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^8$. Рабочий расход в данном случае составляет $Q_{р.ос} = 11 \text{ м}^3/\text{сек}$.

Таким образом, в связи с неблагоприятным расположением центробежного вентилятора (выход на лобовые части) и увеличением аэродинамического сопротивления машины (весьма узкое сечение перед входом в рабочее колесо) для проектируемой синхронной машины более предпочтительным оказался осевой вентилятор,* который к тому же потребляет меньше механической энергии (в расчете на единицу расхода).

* Его применение позволяет уменьшить наружный диаметр колеса.

по n параллельным путям так, чтобы при слиянии двух или нескольких струй итоговый расход оказывался всегда равным сумме частичных расходов, а при разветвлении частичные расходы составлялись как доли общего, т. е. чтобы соблюдался первый закон Кирхгофа: $Q = \sum Q_{im}$ в узле, где m есть номер данного узла. Теперь могут быть вычислены потери напора в каждой ветви схемы, если сопротивления z_i ветвей определены предварительно. Будем иметь: $\Delta H_i = z_i Q_i^2$.

Потери напора от входа в схему до выхода из нее должны быть одинаковы для каждого параллельного пути и в то же время должны быть равны потерям напора во всей схеме при циркуляции в ней расхода Q

$$\sum_k \Delta H_i = \Delta H = \text{const},$$

где k есть номер параллельного пути, т. е. k принимает все целые значения от 1 до n . Необходимо проверить соблюдение этого равенства, сопоставив полученные величины $\sum_k \Delta H_i$ для всех путей схемы замещения (в схеме на рис. 6-24 таких параллельных путей семь). Поскольку распределение расхода на доли было произведено произвольно, требование равенства потерь $\sum_k \Delta H_i$ окажется, вообще говоря, невыполненным.

В качестве второго приближения нужно перераспределить суммарный расход Q на частичные доли таким образом, чтобы потери напора по отдельным ветвям сравнивались между собой. Характер величин, полученных из первого приближения, покажет, в каком направлении целесообразно произвести перераспределение.

При необходимости могут быть проделаны третьи и последующие приближения до тех пор, пока потери напора по всем параллельным путям не сравниваются по крайней мере в первом и втором знаке величин. Полученное равенство потерь напора может служить показателем физически оправданного распределения расходов и основанием для вычисления величины аэродинамического сопротивления схемы по формуле $z = \Delta H / Q^2$.

Следует особо подчеркнуть, что расход Q через систему каналов при использовании метода уравнивания потерь напора может быть принят вполне произвольно. Что касается процесса последовательных приближений (перераспределение частичных расходов), то он отнимает сравнительно немного времени, так как наиболее трудоемкая операция вычисления сопротивлений ветвей схемы z_i проделана раз навсегда. Практика показывает, что квалифицированный расчетчик получает удовлетворительные результаты уже в итоге второго или третьего приближения.

6-8. Расчет схем, содержащих различные напорные элементы

Особый случай представляют схемы вентиляции, содержащие различные напорные элементы, например, вентиляторы и вращающиеся каналы ротора. Строго говоря, именно такие схемы

свойственны электрическим машинам всех типов. Но иногда действием отдельных напорных элементов удается пренебречь без ущерба для точности расчета. Так, например, у турбогенераторов с системами косвенного газового охлаждения самодовлеющую роль в создании циркуляции газа играют вентиляторы.

В тех случаях, когда давления различных напорных элементов соизмеримы, каждый из них должен быть учтен в схеме вентиляции и, следовательно, в схеме замещения.

Рассмотрим для определенности наиболее типичный случай влияния вращающихся вентиляционных каналов, именно схему вентиляции мощных гидрогенераторов (см. рис. 6-2). Как показывает опыт, в машинах этого типа роль вентилятора бывает даже менее существенной, чем роль каналов обода ротора.

Схема замещения такой вентиляционной сети (рис. 6-2) представлена на рис. 6-25. В схеме обозначены: z_1 — аэродинамическое сопротивление вентиляционных каналов статора; z_2 — аэродинамическое сопротивление цепи нажимных гребенок статора; z_3 — аэродинамическое сопротивление полюсных окон; z_4 — аэродинамическое сопротивление охладителей; z_5 — аэродинамическое сопротивление цепи обода ротора; z_6 — аэродинамическое сопротивление цепи вентилятора; z_0 — аэродинамическое сопротивление цепи рециркуляции; q_1 — расход воздуха через вентиляционные каналы статора; q_2 — расход воздуха через нажимные гребенки статора; q_3 — расход воздуха через полюсные окна; q_4 — расход воздуха через охладители; q_5 — расход воздуха через обод ротора; q_6 — расход воздуха через вентилятор; q_0 — расход воздуха через цепь рециркуляции; Q — суммарный расход воздуха; H_p — напор ротора; H_v — напор вентилятора и торцов полюсов.

Как видно из схемы, для аналитического определения неизвестных частичных расходов q_i и суммарного расхода Q необходимо решить следующую систему из восьми уравнений с семью неизвестными:

- 1) $Q = q_4 + q_0;$
- 2) $q_4 = q_1 + q_2;$
- 3) $Q = q_5 + q_6;$
- 4) $q_6 = q_3 + q_2 + q_0;$
- 5) $H_p = z_5 q_5^2 + z_1 q_1^2 + z_4 q_4^2;$
- 6) $H_v = z_6 q_6^2 + z_3 q_3^2 + z_1 q_1^2 + z_4 q_4^2;$
- 7) $H_v = z_6 q_6^2 + z_2 q_2^2 + z_4 q_4^2;$
- 8) $H_v = z_6 q_6^2 + z_2 q_0^2.$

Нелинейность полученной системы уравнений затрудняет ее решение. Осложняющим является также то обстоятельство, что в данном случае не может быть применен метод уравнивания

потерь напора в его общепринятом виде, так как неизвестен суммарный расход воздуха (он не может быть принят произвольно из-за наличия напоров в параллельных ветвях).

Практика вентиляционных расчетов электрических машин выработала несколько методов решения сложных схем, содержащих мостовые элементы с диагональными связями. Некоторые из них приобрели особую актуальность в связи с применением для расчетов вычислительных машин.

Ниже будут изложены практические методы решения мостовых схем, начиная с приближенного графо-аналитического решения.

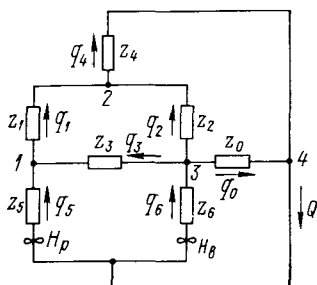


Рис. 6-25. Схема замещения для гидрогенератора с радиальными каналами в ободу ротора

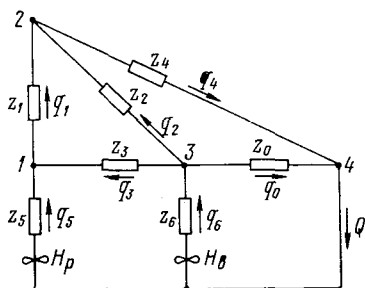


Рис. 6-26. Схема замещения в форме соединений треугольником

6-9. Приближенное графо-аналитическое решение мостовых схем

Представим схему замещения 6-25 в виде соединения сопротивлений в треугольник (рис. 6-26). Оба соединения в треугольник могут быть последовательно преобразованы в соединения в эквивалентную звезду, как это делают для линейных электрических цепей.

Здесь, однако, следует учитывать нелинейность сопротивлений z_i . Поэтому формулы преобразования будут иметь более сложный вид.

В то же время полученное решение не будет точным и обратное преобразование не позволяет получить точные величины частичных расходов в ветвях.

Можно показать [83], что решение эквивалентной схемы оказывается тем точнее, чем больше относительная величина сопротивлений z_0 и z_{23} (т. е. z_2 в первоначальном обозначении).

Опыт расчета гидрогенераторов свидетельствует о том, что эквивалентные преобразования в отдельных случаях применять

целесообразно, так как величина суммарного расхода Q получается весьма близкой к истинной. Знание суммарного расхода позволяет произвести уравнивание потерь напора по параллельным путям, т. е. решить исходную систему уравнений методом последовательных приближений.

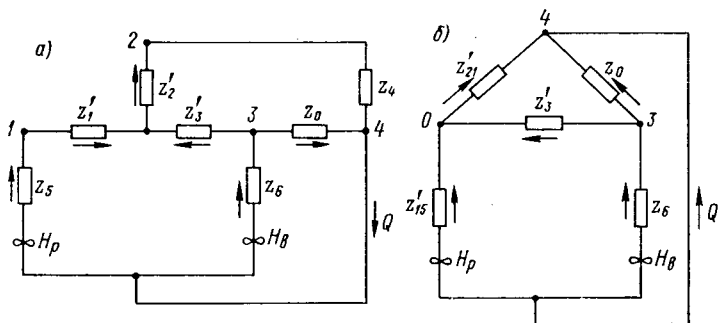


Рис. 6-27. Первое преобразование треугольника в звезду: *a* — эквивалентная звезда; *б* — схема после суммирования последовательных сопротивлений

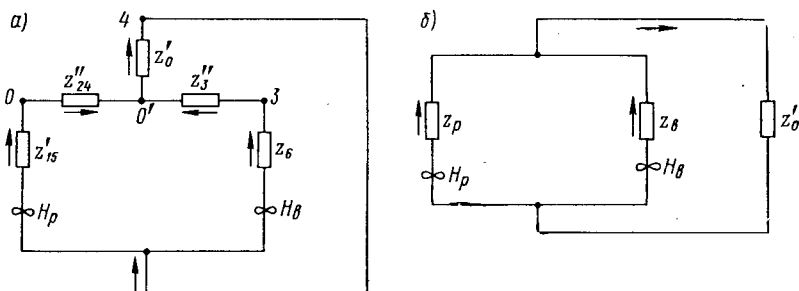


Рис. 6-28. Второе преобразование треугольника в звезду: *a* — эквивалентная звезда; *б* — схема после суммирования последовательных сопротивлений

На рис. 6-27 и 6-28 приведено поэтапное преобразование исходной схемы замещения 6-26. Ниже даны формулы для пересчета сопротивлений:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \frac{z_{12} + z_{31} - z_{23}}{2}; & z'_0 &= \frac{z_{04} + z_{03} - z_{34}}{2}; \\ z'_2 &= \frac{z_{12} + z_{23} - z_{31}}{2}; & z''_{24} &= \frac{z_{04} + z_{34} - z_{03}}{2}; \\ z'_3 &= \frac{z_{23} + z_{31} - z_{12}}{2}; & z''_{31} &= \frac{z_{03} + z_{34} - z_{04}}{2}; \end{aligned}$$

$$z_{12} = \frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_1 + 2\sqrt{z_1(z_2 + z_3) + (z_2 + z_3)}};$$

$$z_{04} = \frac{z'_{24}(z_0 + z'_3)}{z'_{24} + 2\sqrt{z'_{24}(z_0 + z'_3) + (z_0 + z'_3)}};$$

$$z_{23} = \frac{z_2(z_1 + z_3)}{z_2 + 2\sqrt{z_2(z_1 + z_3) + (z_1 + z_3)}};$$

$$z_{03} = \frac{z'_3(z_0 + z'_{24})}{z'_3 + 2\sqrt{z'_3(z_0 + z'_{24}) + (z_0 + z'_{24})}};$$

$$z_{31} = \frac{z_3(z_2 + z_1)}{z_3 + 2\sqrt{z_3(z_2 + z_1) + (z_2 + z_1)}};$$

$$z_{34} = \frac{z_0(z'_{24} + z'_3)}{z_0 + 2\sqrt{z_0(z'_{24} + z'_3) + (z'_{24} + z'_3)}};$$

$$z'_{24} = z'_2 + z_4;$$

$$z'_{15} = z'_1 + z_5;$$

$$z_B = z_6 + z'_3;$$

$$z_P = z''_{24} + z'_{15}.$$

В итоге преобразования схемы получено параллельное соединение двух ветвей, каждая из которых содержит сопротивление и напорный элемент. Последовательно с ними соединено некоторое общее внешнее сопротивление z'_0 . Расчет полученной простейшей схемы производится графически.

При графическом решении схем следует иметь в виду, что при сложении характеристик последовательно соединенных элементов складываются ординаты; при сложении характеристик параллельно соединенных элементов складываются абсциссы (рис. 6-29). В данном случае, при решении схемы на рис. 6-28, б необходимо сложить параллельно характеристики ветви $z_P + H_P$ и ветви $z_B + H_B$ и полученный результат сложить с сопротивлением z'_0 .

Операции графического решения проведены на рис. 6-30. На рисунке обозначены: H_P — внешняя аэродинамическая характеристика системы вращающихся элементов ротора; ΔH_P — потери напора на сопротивлении z_P ; H_B — внешняя аэродинамическая характеристика вентилятора; ΔH_B — потери напора на сопротивлении z_B ; $H_{P.и}$ — избыточный напор ветви ротора $z_P + H_P$, полученный вычитанием (по ординатам) из напора H_P потерь напора ΔH_P ; $H_{B.и}$ — избыточный напор ветви вентилятора $z_B + H_B$, полученный вычитанием (по ординатам) из напора H_B потерь напора ΔH_B ; $H_{P.и} + H_{B.и}$ — избыточный напор параллельно со-

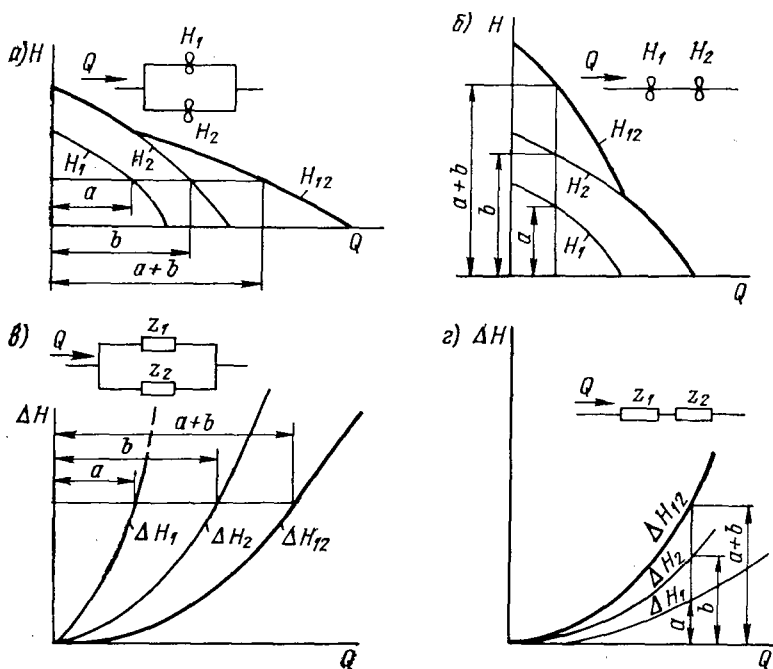


Рис. 6-29. Сложение характеристик: а — параллельные напоры; б — последовательные напоры; в — параллельные сопротивления; г — последовательные сопротивления

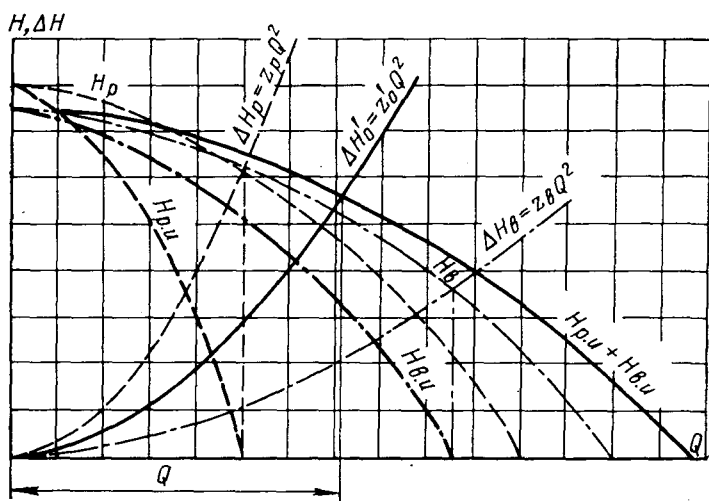


Рис. 6-30. Графическое решение схемы на рис. 6-28, б

единенных ветвей $z_p + H_p$ и $z_b + H_b$, полученный сложением (по абсциссам) избыточных напоров $H_{p.п}$ и $H_{b.и}$; $\Delta H'_0$ — потери напора на сопротивлении внешней ветви; Q — суммарный расход через схему, полученный как точка пересечения суммарного избыточного напора и внешнего сопротивления.

Заметим, что при практическом проектировании внешние аэродинамические характеристики напорных элементов H_p и H_b также могут быть получены графически как разности напора и потерь напора. В особенности это целесообразно при машинном счете, что будет обосновано несколько ниже. Разумеется, графики расчета будут иметь при этом более сложный вид, однако все операции можно производить в отдельности и лишь итоговый результат наносить на общий график.

6-10. Графическое решение схем вентиляции

Элементы графического решения схем вентиляции электрических машин, основанные на сложении и вычитании характеристик последовательно и параллельно соединенных напоров и сопротивлений (с учетом их нелинейности), приведены в предыдущем параграфе, в частности на рис. 6-29.

Здесь будет проиллюстрировано дальнейшее развитие метода графических построений, позволяющее применять его для решения мостовых схем с диагональными связями. Идея решения, изложенная ниже, принадлежит Ю. С. Иванову, который впервые применил ее в 1961 г. в Киевском политехническом институте.

Пусть дано смешанное, параллельно-последовательное соединение аэродинамических сопротивлений, включающее диагональную связь (рис. 6-31, а). Для определения суммарного аэродинамического сопротивления системы z зададимся произвольным фиксированным значением разности напоров $H_1 - H_2 = \Delta H$. Тогда для решения поставленной задачи достаточно определить суммарный расход через систему Q , соответствующий заданному значению ΔH .

Построим на графике (рис. 6-31, б) пересечение характеристик $\Delta H - z_1 Q_1^2 = f_1(Q)$ и $z_3 Q_3^2 = f_2(Q)$. Тогда значение напора в точке пересечения A соответствует случаю, когда $z_5 = \infty$, т. е. когда отсутствует диагональная связь мостовой схемы. Аналогичным образом пересечение характеристик $\Delta H - z_2 Q_2^2 = f_3(Q)$ и $z_4 Q_4^2 = f_4(Q)$ в точке B определит напор в точке B схемы при том же условии $z_5 = \infty$.

Когда сопротивление перемычки имеет конечное значение $z_5 < \infty$, расход через нее соответствует разности напоров $H_A - H_B$. Появление расхода Q_5 приведет к увеличению расхода Q_1 и уменьшению расхода Q_3 , в результате чего потери напора увеличатся на сопротивлении z_1 и уменьшатся на сопротивлении z_3 . Поскольку, однако, сумма указанных потерь имеет

фиксированное значение ΔH , точка A переместится по характеристикам $f_1(Q)$ и $f_2(Q)$ в точки A_1' и A_1'' , лежащие на одной горизонтали. Точно так же точка B переместится по характеристикам $f_3(Q)$ и $f_4(Q)$ в точки B' и B'' .

Точка A_1' определит новый расход в ветви z_1 , точка A_1'' — новый расход в ветви z_3 , поэтому длина отрезка $A_1'A_1''$ будет соответствовать расходу через перемычку z_5 . Этому же расходу будет соответствовать длина отрезка $B'B''$. Таким образом мо-

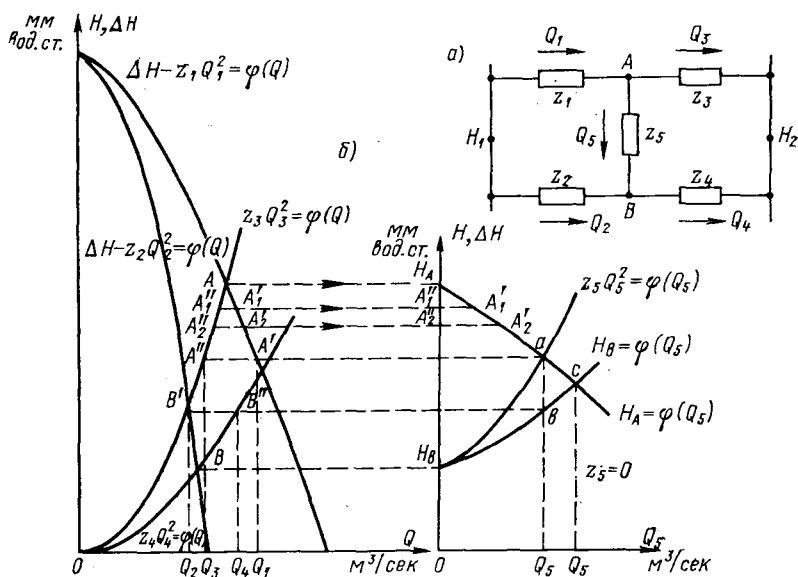


Рис. 6-31. Мостовая схема замещения с диагональной связью (а) и график ее решения (б)

жет быть получена зависимость напоров в точках A и B от расхода Q_5 в перемычке z_5 . Для этого отрезки $A'A''$ и $B'B''$ сносятся (в произвольном масштабе) в качестве абсцисс на вспомогательную систему координат. При этом ординатами являются отрезки разности напоров $H_A - H_B$, соответствующие промежуточным положениям точек A', A'' и B', B'' . В результате получаем характеристики $H_A = f(Q_5)$ и $H_B = f(Q_5)$, пересечение которых в точке C определяет расход через перемычку при нулевом значении сопротивления перемычки $z_5 = 0$.

Для определения реального расхода Q_5 к характеристике $H_B = \varphi(Q_5)$ нужно добавить характеристику $z_5 Q_5^2 = \varphi(Q_5)$. Этот же результат дает и вычитание последней характеристики из характеристики $H_A = \varphi(Q_5)$.

Пересечение новой характеристики $\varphi_{\Sigma}(Q_5) = H_B(Q_5) + z_5 Q_5^2$ с зависимостью $H_A = \varphi(Q_5)$ определит расход через перемычку

при заданном значении ΔH . Отрезок ab дает при этом потери напора в переключке, т. е. на сопротивлении z_5 .

Снося горизонтальными точки a и b на основную систему координат, получим расходы по ветвям схемы. Точке A' соответствует расход Q_1 , точке A'' — расход Q_3 , точке B' — расход Q_2 , точке B'' — расход Q_4 . При этом должно соблюдаться равенство $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = Q$.

Теперь в соответствии с поставленной задачей может быть определено аэродинамическое сопротивление схемы $z = \Delta H / Q^2$.

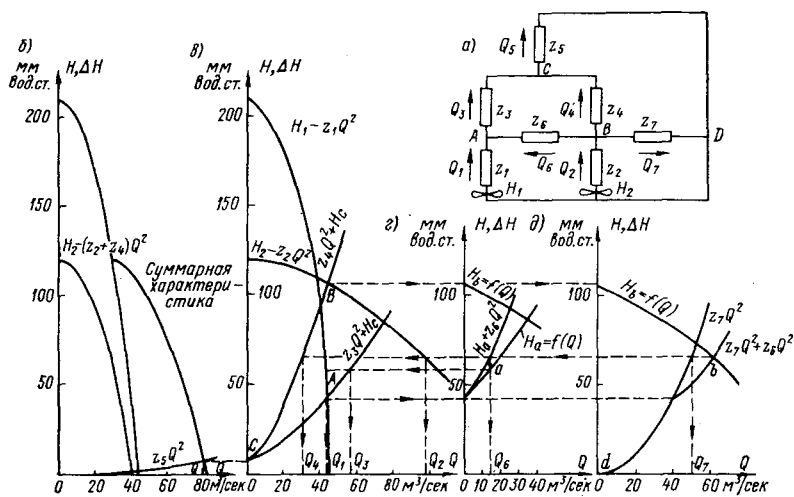


Рис. 6-32. Схема замещения (а) и график ее решения (б, в, з, д)

Знание этой величины позволяет построить кривую потерь напора в схеме, когда в этом есть необходимость. Указанную кривую можно определить и графически, задаваясь различными значениями разности напоров ΔH .

Некоторым развитием изложенного метода расчета является его применение для решения схемы вентиляции мощного гидрогенератора. На рис. 6-32 приведена схема замещения (а) и ее графическое решение (б, в, з и д).

Вначале принято $z_6 = \infty$ и $z_7 = \infty$. Для этих условий определено приближенное значение расхода Q_5 (рис. 6-32, б) и соответствующие потери напора H_C в точке С.

Следующим этапом определены напоры в точках a и b при тех же предположениях, т. е. при $z_6 = z_7 = \infty$ (рис. 6-32, в).

Включение в сеть диагонали z_6 позволяет определить изменение напоров в точках a и b в функции расхода Q_6 (рис. 6-32, з).

Включение в сеть диагонали z_7 позволяет определить изменение напоров в точках a и b в функции расхода Q_7 (рис. 6-32, д).

Поскольку z_6 и z_7 фактически включены в схему как параллельные сопротивления, рабочей точкой является точка пересечения суммарной характеристики $\Delta H_{\Sigma} = z_7 Q^2 + z_6 Q^2 + H_a(Q)$ с характеристикой $H_b = f(Q)$.

Для получения частичных расходов в ветвях следует снести точку пересечения b на соответствующие характеристики. Второе приближение по расходу Q_5 лишено практического смысла, так как введение связи z_6 увеличивает Q_5 , а введение связи z_7 его уменьшает. Но при необходимости второе приближение может быть проделано. На рис. 6-32 решение* дано применительно к гидрогенератору мощностью 500 Мвт.

6-11. Применение цифровых вычислительных машин для вентиляционного расчета

При проектировании электрических машин необходимо выполнять расчеты различных вариантов конструкции. Поскольку вентиляционный расчет сложных схем является трудоемким, необходимость использования вычислительной техники на некоторых этапах проектирования вполне очевидна.

Следует, однако, подчеркнуть, что применение вычислительных машин для производства вентиляционного расчета сопряжено с необходимостью учитывать специфические ограничения, присущие схемам с нелинейными элементами. В частности, использование наиболее универсального средства — машин дискретного счета, в первую очередь цифровых электронных машин, предполагает базирование на таких методах расчета, для которых процесс итераций (последовательных приближений) является сходящимся и притом достаточно быстро сходящимся.

В этом смысле метод уравнивания потерь напора по параллельным путям (с позиций рассматриваемого предмета его можно назвать методом случайных проб) оказывается несостоятельным. Программы расчета, созданные на основе этого метода, получили ограниченное распространение [50].

Значительно более целесообразным оказалось использование метода направленных итераций, который исходит из необходимости удовлетворения одновременно обоим законам Кирхгофа — для узлов и для контуров [81].

Прежде чем приступить к изложению указанного метода, особо подчеркнем, что направления потоков во всех ветвях исследуемых схем вентиляции должны быть заданы предварительно при использовании любого из известных методов дискретного счета. Это ограничение, весьма существенное, когда речь идет о мало изученных конструкциях, может быть снято лишь при применении аналоговых устройств, которые описаны в следующем параграфе.

* Приведенное решение получил инженер Н. В. Педан.

Итак, рассмотрим параметры, характеризующие всякий замкнутый контур произвольной схемы вентиляции. Такими параметрами являются: аэродинамические сопротивления ветвей контура z_i , расходы среды в ветвях Q_i и напоры (в том числе потери напора) в ветвях H_i .

Одновременное выполнение двух законов Кирхгофа для произвольного контура выражается уравнениями:

- 1) $\sum Q_i = 0$ во всех узлах контура,
- 2) $\sum \Delta H_i + \sum H_i = 0$ во всех ветвях контура.

Распределим произвольный суммарный расход Q через схему (т. е. исследуемую совокупность контуров) таким образом, чтобы были выполнены оба сформулированных требования

(рис. 6-33). Естественно, при этом значения аэродинамических сопротивлений в ветвях $z_{oi} = \frac{\Delta H_{oi}}{Q_{oi}^2}$ будут отличаться

от действительных (заданных конструкцией машины) значений z_i .

Действительные значения сопротивлений будем вычислять посредством поправочного коэффициента: $z_i = \alpha_{oi} z_{oi}$. Если считать, что все сопротивления в ветвях приведены к действительному значению, то одновременно окажутся откорректированными (по сравнению с произвольно принятыми значениями) величины и расхода и потерь напора. Правильность этого утверждения будет ясна из дальнейшего.

Будем считать $\Delta Q_{oi} \ll Q_{oi}$. Тогда

$$\Delta H_1 \approx \alpha_{oi} z_{oi} (Q_{oi}^2 + 2Q_{oi} \Delta Q_{oi}) = \alpha_{oi} z_{oi} Q_{oi} (Q_{oi} + 2\Delta Q_{oi}) = \alpha_{oi} R_{oi} (Q_{oi} + 2\Delta Q_{oi}), \quad (6-22)$$

где $R_{oi} = z_{oi} Q_{oi} = \frac{z_{oi} Q_{oi}^2}{Q_{oi}} = \frac{\Delta H_{oi}}{Q_{oi}}$ есть так называемое линейное сопротивление ветви.

Уравнение (6-22) может быть составлено для всех ветвей схемы вентиляции. В итоге получим систему линейных алгебраи-

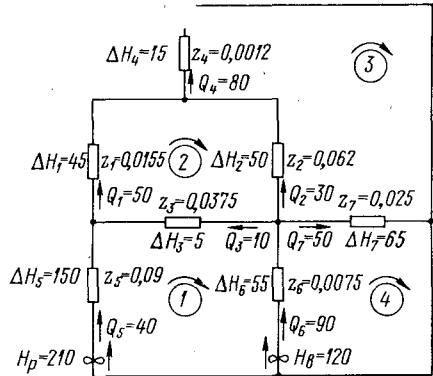


Рис. 6-33. Произвольное распределение расхода и потерь напора с соблюдением законов Кирхгофа

* Целесообразно так подобрать произвольный суммарный расход Q , чтобы значения условных сопротивлений оказались в диапазоне $z_{oi} = (0,5 \div \div 2,0) z_i$.

D_k — определитель, получающийся из D заменой столбца при неизвестном X_k столбцом, составленным из свободных членов H_k ,

$$D_k = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & H_1 & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & H_2 & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & H_k & \dots & R_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & H_n & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поправка расхода для каждой ветви ΔQ_{0i} определяется как алгебраическая сумма поправок расхода в смежных контурах (X_k и X_m), для которых ветвь i является общей.

Особого внимания требует правило знаков при составлении сумм, входящих в расчет. Потери напора ΔH_i направлены навстречу расходу Q_i в данной ветви, что должно учитываться при предварительном распределении потерь напора по второму закону Кирхгофа. Точно так же и суммы $H_k - \sum (\alpha_{0i} \Delta H_{0i})_k$ составляются с учетом соответствия либо несоответствия направления потерь напора направлению обхода контура. При суммировании поправок расхода контуров X_k и X_m для определения поправки расхода общей ветви ΔQ_i поправка X берется со своим знаком, если направление расхода в ветви Q_i согласуется с направлением обхода контура, и с противоположным знаком, если расход направлен навстречу обходу:

$$\Delta Q_{0i} = \pm X_k \pm X_m.$$

После того как определены новые значения расходов в ветвях

$$Q_{1i} = Q_{0i} \pm \Delta Q_{0i} \quad (6-25)$$

могут быть определены новые значения потерь напора

$$\Delta H_i = \alpha_{0i} R_{0i} (Q_{0i} + 2\Delta Q_{0i}) \quad (6-26)$$

и сопротивления ветвей после первой итерации

$$z_{1i} = \frac{\Delta H_i}{Q_i^2}.$$

После этого выполняется вторая итерация, где используются известные теперь значения Q_{1i} и ΔH_{1i} . Аналогично могут быть выполнены последующие итерации, если в этом есть необходимость. Опыт расчетов показывает, однако, что после второй итерации разница между условными и действительными значениями аэродинамических сопротивлений оказывается пренебрежимо малой.

Таким образом, способ направленных итераций, основанный на соблюдении двух законов Кирхгофа и введении условных сопротивлений, дает быстроходящийся ряд величин $z_{0i}, z_{1i}, z_{2i} \dots \rightarrow z_i$. При этом схема расчета для вычислительной машины (алгоритм) оказывается простой. Правило знаков легко может быть учтено при программировании. Что касается процесса вычислений определителей матриц, то для него всегда имеются стереотипные подпрограммы.

Следует добавить, что при небольшом числе контуров в схеме вентиляции машины (не более четырех) расчет с успехом может быть выполнен на логарифмической линейке.

При использовании в расчете универсальных внешних аэродинамических характеристик вентиляторов (6-16) и (6-21) им следует придать форму парабол без члена, содержащего аргумент в первой степени: $y = \text{const} - ax^2$. Для этой цели члены универсальных уравнений с Q^* в первой степени заменяются константами, причем Q^* придается приближенное значение, равное номинальному $Q^* = Q_n^*$.

Таким образом имеем:

а) для центробежных вентиляторов

$$H^* = [0,5 (1 - r^{*2}) + K (0,5 \pm Q_n^* \cos \beta_2)] - r^{*2} Q^{*2}; \quad (6-27)$$

б) для осевых вентиляторов

$$H^* = \left(0,2 \frac{10 + 2 \sin \theta}{10 + \tau} + 0,5 Q_n^* \right) - \frac{1}{0,1 \nu \tau \delta \frac{0,3 + \delta}{0,3 - \delta} \sin \theta} Q^{*2}. \quad (6-28)$$

Ниже в качестве иллюстрации метода направленных итераций приведены результаты расчета гидрогенератора мощностью 500 Мвт [уравнения (6-29), рис. 6-33, табл. 6-1 и 6-2]. Отметим, что с учетом соотношений $\alpha_0 R_0 = \alpha_0 z_0 Q_0 = z Q_0$ и $\alpha \Delta H_0 = \alpha_0 z_0 Q_0^2 = z Q_0^2$ коэффициент α практически не требуется вычислять. Из (6-23) получим:

$$\left. \begin{aligned} 4,65x_1 - 0,375x_2 + 0 & - 0,675 = 5,25; \\ -0,375x_1 + 3,01x_2 - 1,87x_3 + 0 & = 6,65; \\ 0 & - 1,87x_2 + 3,206x_3 - 1,25x_4 = -0,49; \\ -0,675x_1 + 0 & - 1,25x_3 + 1,925x_4 = -1,62. \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,71; \quad x_2 = 4,12; \quad x_3 = 2,9; \quad x_4 = 1,65; \\ \Delta Q_{01} &= x_2 = 4,12; \quad \Delta Q_{02} = -x_2 + x_3 = -1,22; \\ \Delta Q_{03} &= x_2 - x_1 = 2,41; \quad \Delta Q_{04} = x_3 = 2,9; \\ \Delta Q_{05} &= x_1 = 1,71; \quad \Delta Q_{06} = -x_1 + x_4 = -0,06; \\ \Delta Q_{07} &= -x_3 + x_4 = -0,74. \end{aligned}$$

Таблица 6-1

Вычисляемая величина	Номер ветви i						
	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0,0155	0,0620	0,0375	0,0012	0,0900	0,0075	0,0250
ΔH_{oi}	45	50	5,0	15	150	55	65
Q_{oi}	50	30	10	80	40	90	50
$\alpha_{oi} R_{oi}$	0,775	1,860	0,375	0,096	3,600	0,675	1,250
$\alpha_{oi} \Delta H_{oi}$	38,75	55,80	3,75	7,68	144,00	60,75	62,50
ΔQ_{oi}	4,12	-1,22	2,41	2,90	1,71	-0,06	-1,25
$Q_{1i} = Q_{oi} + \Delta Q_{oi}$	54,12	28,78	12,41	82,90	41,71	89,94	48,75
$\Delta H_{1i} = \alpha_{oi} R_{oi} (Q_{oi} + 2 \Delta Q_{oi})$	45,1	51,2	5,56	82,3	156,3	60,7	58,6
$z_{1i} = \frac{\Delta H_{1i}}{Q_{1i}^2}$	0,0154	0,0620	0,0361	0,0012	0,0900	0,0075	0,0247

Таблица 6-2

Вычисляемая величина	Номер контура			
	1	2	3	4
Сумма напоров	90	0	0	120
Потери напоров, направленные согласно с направлением обхода контура	$\begin{array}{r} + 144 \\ 0 \end{array}$ 144,00	$\begin{array}{r} + 38,75 \\ 3,75 \end{array}$ 42,50	$\begin{array}{r} + 55,80 \\ 7,68 \end{array}$ 63,48	$\begin{array}{r} + 60,75 \\ 62,5 \end{array}$ 123,25
Потери напора, направленные навстречу обходу контура	$\begin{array}{r} + 3,75 \\ 60,75 \end{array}$ 64,50	$\begin{array}{r} + 55,80 \\ 0 \end{array}$ 55,80	$\begin{array}{r} + 62,50 \\ 0 \end{array}$ 62,50	0
Напор в контуре	5,25	6,65	-0,49	-1,62

Как видно из табл. 6-1, после первой итерации величины z_{1i} достаточно близки к величинам z_i .

6-12. Применение аналоговых вычислительных машин для вентиляционного расчета

Аналоговое электрическое устройство воспроизводит исследуемую систему циркуляции среды в электрических машинах, причем элементы схемы — сопротивление, напряжение и ток — моделируют соответствующие элементы схемы вентиляции — сопротивление, напор и расход. Для того чтобы закономерности

распределения в электрической схеме были идентичными закономерностям в схеме аэродинамической, сопротивления в электрической схеме подбираются из расчета квадратичной зависимости потерь напряжения Δu от тока: $\Delta u = R'I^2$. Этим сопротивлением может быть, например, радиолампа или полупроводниковый диод.

Так достигается аналогия с гидравлической цепью, для сопротивления которой, как мы знаем, справедливо уравнение $\Delta H = zQ^2$.

Поскольку электрическая цепь аналога воспроизводит схему вентиляции, то при подаче напряжения, соответствующего заданному напору нагнетателя электрической машины, распределение токов по ветвям окажется тождественным распределению расходов и распределение потерь напряжения — распределению потерь напора. Вся сложность, следовательно, сводится к правильному моделированию сопротивлений.

Практически аналоговые устройства снабжены набором сопротивлений, отградуированных в единицах аэродинамического сопротивления, т. е. в мюргах. Расчетчик распределяет их в схеме аналога, исходя из заданных значений аэродинамических сопротивлений схемы электрической машины. Следует понимать при этом, что на самом деле электрические сопротивления аналога являются переменными

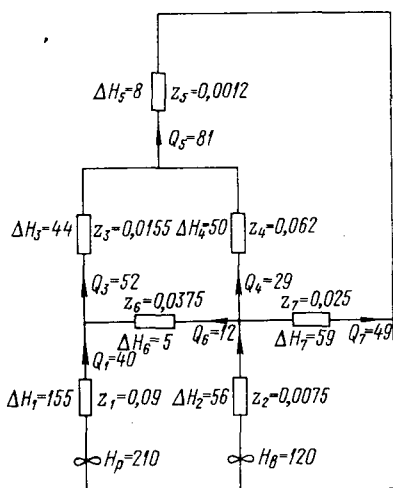


Рис. 6-34. Решение схемы гидрогенератора на аналоговой машине

величинами, линейно зависящими от тока, как это и следует из приведенных выше пояснений ($\Delta u = RI = R'I$, где R' — сопротивление элемента без тока).

В связи с простотой использования и равными возможностями решения простых схем и схем произвольной сложности, т. е. в связи с возможностями весьма быстрого исследования многих вариантов схем вентиляции, аналоговые машины являются крайне удобным и рациональным инструментом вентиляционного расчета. Они независимы, как уже указывалось, от весьма затрудняющего другие способы расчета ограничения — необходимости до выполнения расчетов правильно назначать направления частных расходов.

Есть лишь два очевидных недостатка аналоговых машин. Первый из них — отсутствие самих машин у широкого круга по-

требителей в связи с их дефицитностью и относительно высокой стоимостью (если иметь в виду узко специфическое назначение машины). Можно, однако, полагать, что в ближайшие годы все более или менее крупные организации, занятые практическим проектированием электрических машин, смогут приобрести аналоговые устройства.

Другой недостаток аналоговых устройств — необходимость тщательной систематической градуировки применяемых сопротивлений — легко преодолевается при методически рационально организованной системе расчетов на машине.

Приведем решение (рис. 6-34) схемы вентиляции гидрогенератора мощностью 500 Мвт, полученное на аналоговом устройстве типа ЭМВС-6, предназначенном номинально для расчетов шахтной вентиляции.

6-13. Сопоставление методов вентиляционного расчета

Сопоставление методов расчета естественно производить по признакам точности, простоты и универсальности. Целесообразно рассмотреть результаты расчета различными методами одной электрической машины (в нашем случае гидрогенератора мощностью 500 Мвт). Схема замещения генератора представлена на рис. 6-34. Значения расходов в ветвях сведены в табл. 6-3. Измеренное значение расхода $Q_5 = 81 \text{ м}^3/\text{сек}$.

Таблица 6-3

Метод расчета	Расходы в ветвях						
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
Преобразование треугольник—звезда	44	91	43	28	78	24	48
Графическое решение	42	89	54	29	83	12	48
Метод направленных итераций	42	90	54	29	83	12	49
Расчет на электрическом аналоге	40	90	52	29	81	12	47

Как видно из таблицы, только метод преобразования треугольник — звезда не обеспечивает требуемую точность. Наибольшую сходимость с точки зрения удовлетворения второго закона Кирхгофа обеспечивает метод направленных итераций, что естественно вытекает из его сущности.

Метод направленных итераций наиболее универсален, поскольку, будучи запрограммирован для вычислительной машины, позволяет вести вентиляционный расчет в тесном единстве с тепловым расчетом и при необходимости с другими видами расчета: электрическим и механическим.

Наиболее прост и удобен метод графического решения, однако его никак нельзя признать универсальным. В сложных схемах такой метод практически неприменим.

Самым гибким и менее трудоемким несомненно следует признать метод расчета на аналоговых устройствах, однако точность его может быть гарантирована лишь при тщательной систематической проверке всех элементов аналоговой машины.

6-14. Пример вентиляционного расчета турбогенератора мощностью 200 Мвт

Методы расчета схем с диагональными связями и источниками напора в различных ветвях проиллюстрированы численными примерами в предыдущих параграфах. Здесь будет приведен расчет сложной схемы вентиляции методом уравнивания потерь напора по параллельным путям.

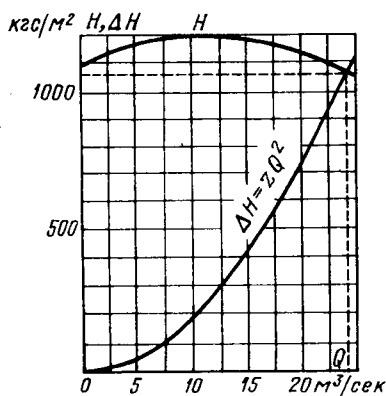


Рис. 6-35. График определения рабочего расхода

Определим рабочий расход газа Q_p в турбогенераторе мощностью 200 Мвт с шестиструйной нагнетательной схемой вентиляции (см. рис. 6-3, б). Схема замещения показана на рис. 6-24. С учетом симметрии машины расчет проводится на один вентилятор, т. е. определяется половина рабочего расхода.

Номера параллельных путей газа обозначены на рис. 6-3, б. Номера расчетных точек обозначены в табл. 6-4. Расчет ведется в условных единицах потерь

напора $\Delta H_{\text{усл}} = \xi \omega^2$. Результаты расчета сведены в табл. 6-4, данные которой отражают этап расчета после уравнивания потерь напора по параллельным путям. Параллельных путей семь. Суммы потерь напора $\Delta H_{\text{усл}}$ в условных единицах приведены в табл. 6-5.

Для определения аэродинамического сопротивления схемы можно взять примерное среднее значение потерь напора (в действительных единицах):

$$z = \frac{\Delta H}{Q^2} = \frac{\gamma}{2g} \frac{\Delta H_{\text{усл}}}{Q^2} = \frac{0,06 \cdot 10 \cdot 500}{400} = 1,75 \text{ киломюргов.}$$

Кривая потерь напора zQ^2 нанесена на рис. 6-35. На этом же рисунке показана внешняя аэродинамическая характеристика компрессора машины, полученная экспериментально. Точка пересечения характеристик определяет рабочий расход на полма-

Таблица 6-4

Номер рас- четной точки	Наименование сечения	Номер пути газа	Сечение, м ²	Коэффициент местного сопротив- ления	Расход, м ³ /сек	Скорость, м/сек	Потери напора, условн. ед.
1	Охладители	1	5,650	1,61	20	3,5	20
2	Торцевой щит	1	1,020	1,56	20	19,6	600
3	Перед вентилятором	1	0,344	0,90	20	58,0	3020
4	После вентилятора	1	0,518	0,50	20	38,6	742
5	Проход в зазор	3	0,527	6,07	7,90	15,0	1361
6	Нажимные пальцы	3	0,030	1,38	1,59	52,3	3780
7	Нажимные пальцы	3	0,113	7,4	1,59	14,1	1470
8	Нажимные пальцы	3	0,520	14,10	1,59	3,1	136
9	Переходные окна	4	1,215	6,67	12,1	9,9	652
10	Перед каналами	5	2,560	5,55	4,35	1,7	16
11	Радиальные каналы	5	0,391	0,47	4,35	11,1	58
12	Радиальные каналы	5	0,114	0,42	4,35	38,2	611
13	Зазор	6	0,261	14,00	1,49	5,7	455
14	Зазор	3	0,261	0,78	6,31	24,2	456
15	Радиальные каналы	3; 6	0,162	1,52	7,80	48,1	3510
16	Радиальные каналы	3; 6	0,557	5,96	7,80	14,0	1170
17	После каналов	3; 6	3,620	30,20	7,80	2,1	133
18	Переходные окна	8	1,215	4,45	7,79	6,4	182
19	Перед каналами	9	2,530	5,43	4,92	1,9	20
20	Радиальные каналы	9	0,391	0,47	4,92	12,6	75
21	Радиальные каналы	9	0,114	0,42	4,92	43,2	781
22	Зазор	10	0,261	14,00	2,45	9,4	1240
23	Зазор	7	0,261	14,00	2,86	10,9	1660
24	Радиальные каналы	7; 10	0,130	1,54	5,31	41	2600
25	Радиальные каналы	7; 10	0,447	5,96	5,31	11,9	842
26	После каналов	7; 10	2,780	27,30	5,31	1,9	99
27	Переходные окна	12	1,215	4,33	2,83	2,3	23
28	Перед каналами	12	1,510	1,16	2,83	1,8	4
29	Радиальные каналы	12	0,223	0,47	2,83	12,7	76
30	Радиальные каналы	12	0,065	0,42	2,83	43,5	792
31	Зазор	12	0,261	10,15	2,83	10,8	1200
32	Зазор	11	0,261	14,00	2,47	9,5	1262
33	Радиальные каналы	11; 12	0,130	1,54	5,30	40,7	2540
34	Радиальные каналы	11; 12	0,447	5,96	5,30	11,8	830
35	После каналов	11; 12	2,780	27,3	5,30	1,9	98
36	Переходные окна	11; 12	1,010	2,00	5,30	4,8	46
37	Переходные окна	7; 10; 11; 12	1,010	2,03	10,61	10,5	224

шины $Q_p = 24 \text{ м}^3/\text{сек}$ при напоре $H = 1080 \text{ мм вод. ст.}$ Следова-
тельно, расход на всю машину равен $48 \text{ м}^3/\text{сек}$. Измеренное зна-
чение равно $51 \text{ м}^3/\text{сек}$.

Потери напора в турбогенераторе ΔH_d в действительности
зависят от абсолютного давления водорода в корпусе $p_{\text{абс}}$. Они
равны $H p_{\text{абс}}/10$. В вентиляционном расчете принято определять
расход воздуха (не газа), с тем чтобы при необходимости дела-
ть пересчет на любое заданное давление водорода.

Но- мер пути	Номера расчетных точек	Потери напора
3	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	10 874
3	1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16, 17	10 452
6	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17	10 956
7	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 37	10 401
10	1, 2, 3, 4, 9, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 37	10 643
11	1, 2, 3, 4, 9, 18, 19, 20, 21, 32, 33, 34, 35, 36, 37	10 733
12	1, 2, 3, 4, 9, 18, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37	10 830

Глава седьмая

ВЕНТИЛЯЦИОННЫЙ РАСЧЕТ СИСТЕМ ОДНОТИПНЫХ
ОТВЕТВЛЕНИЙ

7-1. Вводные замечания

Выше, в § 5-7, в качестве иллюстрации уравнения Бернулли был рассмотрен процесс циркуляции охлаждающей среды в системе, состоящей из питающего канала и ряда однотипных от-

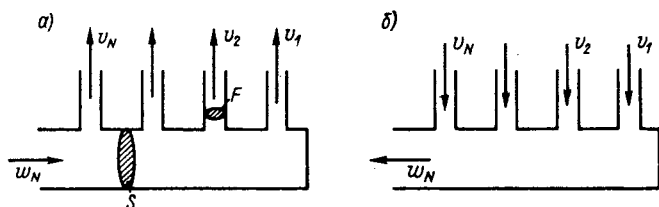


Рис. 7-1. Схемы распределения: а — нагнетательная; б — вытяжная

ветвлений, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга и от входа в питающий канал. Такая система является весьма типичной для конструкций электрических машин.

Радиальные вентиляционные каналы статоров машин переменного тока, роторов асинхронных машин и якорей машин постоянного тока, роторов некоторых типов турбогенераторов и других машин являются геометрически вполне идентичными и получают охлаждающую среду из одного общего питающего канала.

Схемы распределения могут быть как нагнетательными, так и вытяжными (рис. 7-1). В последнем случае питающий канал правильнее называть сборным.

Теория и опыт говорят о том, что расходы и скорости среды в ответвлениях неодинаковы и зависят от положения данного ответвления в системе распределения, или, проще говоря, от номера данного ответвления. Договоримся нумерацию ответвлений вести от закрытого торца питающего канала (рис. 7-2). В случае симметричных систем распределения, когда питающий канал получает среду по обоим торцам (например, зазор одноструйного турбогенератора), весь расчет ведется на половину системы распределения и закрытым торцом канала считается его середина (т. е. сечение симметрии с нулевой продольной циркуляцией).

Неравномерность распределения среды может быть значительной и должна учитываться при выполнении теплового рас-

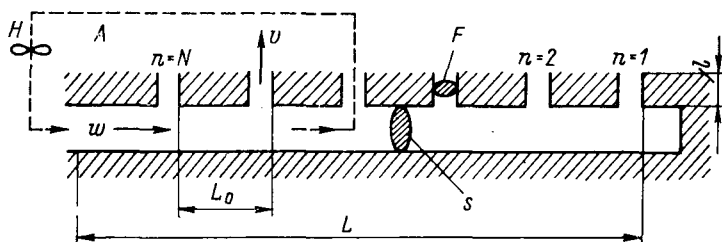


Рис. 7-2. Система распределения

чета электрической машины. Больше того, степень неравномерности распределения может служить критерием целесообразности избранной системы охлаждения машины в целом, или ее отдельных элементов. По этим причинам качественный анализ распределения, подобный рассуждениям в § 5-7, оказывается недостаточным с точки зрения требований практического проектирования машин. Необходима разработка методов строгого количественного расчета скоростей в каждом ответвлении системы.

Поскольку применительно к конструкциям электрических машин эта задача является и типичной, и актуальной, она в течение длительного периода неоднократно исследовалась и была решена именно в сфере электромашиностроения, хотя представляет несомненный интерес для анализа иных гидравлических и аэродинамических систем.

7-2. Виды сопротивлений в системах с ответвлениями

Процесс распределения скоростей в системе является сложным. Для его анализа необходима такая схематизация, при которой упрощенная модель явления воплощает в себе его существенные черты независимо от конкретной конструкции системы и в то же время допускает математическое описание. Примем за такую модель схему, представленную на рис. 7-2. Учитывая,

что рациональная система обозначений упрощает конечные расчетные формулы и делает их более наглядными, обратим особое внимание на обозначения, применяемые в дальнейшем анализе. Обозначим: N — число ответвлений в системе; n — номер данного ответвления; F — сечение одного ответвления; S — сечение питающего канала; v_n — скорость среды в ответвлении n ; w_n — скорость среды в питающем канале перед ответвлением n , $v_{ср}$ — средняя скорость в ответвлениях; $w_{ср}$ — средняя скорость в питающем канале; l — длина ответвления; L — длина питающего

канала; L_0 — шаг питающего канала (расстояние между ответвлениями); d — гидравлический диаметр ответвления; D — гидравлический диаметр питающего канала; λ_d — коэффициент трения ответвления; λ — коэффициент трения питающего канала; ξ_{Σ} — коэффициент местного сопротивления ответвления; ζ — коэффициент местного сопротивления питающего канала; ζ_0 — коэффициент сопротивления питающего канала на один шаг; $f = F/S$ — отношение сечений одного ответвления и питающего канала; $s^* = S/FN$ — отношение сечения питающего канала к суммарному сечению всех ответвлений.

Заметим, что при этих обозначениях

$$s^* = \frac{1}{fN} \quad \text{и} \quad v_{ср} = \frac{w_n S}{FN}.$$

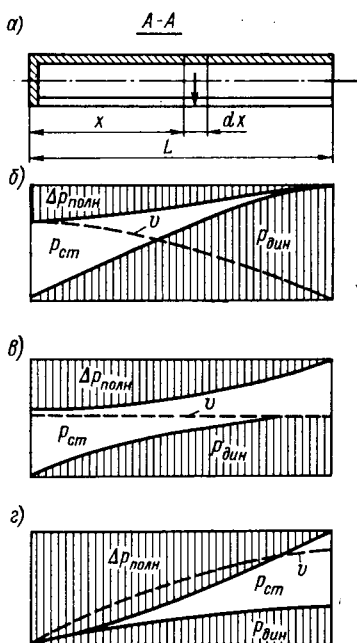


Рис. 7-3. Влияние трения в питающем канале

Как видно из рис. 7-2, движущаяся среда преодолевает в любом замкнутом контуре системы распределения (показан пунктиром) четыре типа местных сопротивлений:

- 1) сопротивление трения питающего канала;
- 2) сопротивление при ответвлении (вход с поворотом и деформацией струи);
- 3) сопротивление питающего канала на ширине ответвления (разделение струи на две);
- 4) сопротивление ответвившегося канала — ответвления (трение, изменения сечения, выход).

Мы видели выше (§ 5-15), что суммарное сопротивление единичных нагнетательных и вытяжных тройников не является функцией критериев гидромеханического подобия. Задача тем

более осложняется, когда исследуется взаимосвязанная система тройников, каждый из которых находится в различных условиях с точки зрения распределения компонент полного давления вдоль питающего канала. Исходя из сказанного, будем различать для упрощения задачи лишь два вида сопротивлений: суммарное сопротивление питающего канала от входа среды в него до данного ответвления и суммарное сопротивление ответвления.

Напомним, что причиной неравномерности распределения является увеличение (в нагнетательных схемах) статического давления в связи с уменьшением расхода вдоль питающего канала и соответствующим уменьшением динамического давления. Указанный эффект компенсируется необратимыми потерями полного давления в питающем канале, причем при значительном сопротивлении последнего (малое значение параметра s^* , большое значение параметра ζ/ξ_{Σ}) скорость в ответвлениях вдоль канала может даже убывать.

Таким образом, как показано на рис. 7-3, где ответвления мыслятся в виде непрерывной щели (т. е. суммарное сечение ответвлений распределено вдоль всего питающего канала), распределение может меняться от крайне неравномерного с максимумом скорости в последнем по ходу струи ответвлении (рис. 7-3, б) до крайне неравномерного с максимумом скорости в первом по ходу струи ответвлении (рис. 7-3, з). В качестве промежуточного случая возможно практически равномерное распределение (рис. 7-3, в).

7-3. Рекуррентные формулы для расчета расходов

Разность статических давлений перед ответвлениями N и n составляет (рис. 7-2)

$$\Delta p_{ст} = p_{дин} - p_{дин n} - \sum_n^N \Delta p_{полн}, \quad (7-1)$$

где $\Delta p_{полн}$ — потери полного давления в питающем канале на один шаг. Если камеру A за ответвлениями считать бесконечной емкостью, т. е. элементом, не имеющим сопротивления, можно принять, что полное давление в любом замкнутом контуре равно полному давлению в питающем канале (давлению Бернулли в струе), т. е. является величиной для всех контуров неизменной. Тогда для произвольного контура получим:

$$p_{полн n} = p_{дин N} + p_{ст N} = p_{дин n} + p_{ст n} + \sum_n^N \Delta p_{полн}, \quad (7-2)$$

так как из (7-1)

$$p_{дин N} = p_{дин n} + \sum_n^N \Delta p_{полн} + \Delta p_{ст}$$

и по определению $p_{ст n} = p_{ст N} - \Delta p_{ст}$.

Выразим члены уравнения (7-2) через соответствующие скорости. Получим:

$$\rho_{\text{полн } n} = \rho_{\text{полн. системы}} = \frac{\rho}{2} \left(\omega_n^2 + \xi_{n\Sigma} v_n^2 + \zeta \sum_n^N \omega_n^2 \right) = \text{const}, \quad (7-3)$$

где принято, что скорость v_n в ответвлении n определяется статическим давлением перед ответвлением $p_{\text{ст } n} = \frac{\rho}{2} \xi_{n\Sigma} v_n^2$. Кроме того, в (7-3) содержится допущение о независимости коэффициента сопротивления питающего канала ζ_0 от скорости на данном участке, т. е. допущение об автомодельности движения (развитый турбулентный режим): $\Delta p_{\text{полн } n} = \frac{\rho}{2} \zeta_0 \omega_n^2$.

Уравнение энергии (7-3) может быть дополнено уравнением неразрывности струи. Как очевидно,

$$\omega_n = \omega_N - f \sum_{n+1}^N v_n. \quad (7-4)$$

Таким образом, неизвестная скорость в питающем канале ω_n может быть выражена лишь через неизвестные скорости в ответвлениях v_n , и мы имеем систему $2N$ уравнений (7-3) и (7-4) с $2N$ неизвестными. Эта система не может быть решена матричными методами, поскольку неизвестные входят в уравнения во второй степени.

И. Хак [74] получил рекуррентные формулы для расчета безразмерных коэффициентов расхода в ответвлениях. Если обозначить отношение расхода в ответвлении n к расходу в ответвлении 1 через ε_n , отношение коэффициента динамического давления к сопротивлению ответвления f^2/ξ_Σ через γ , отношение сопротивлений в питающем канале и ответвлений $\zeta f^2/\xi_\Sigma = \zeta_0 \gamma$ через κ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1, \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{1 + \kappa - \gamma}, \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{(1 - \gamma) \varepsilon_2^2 + \kappa (1 + \varepsilon_2)^2 - 2\gamma \varepsilon_2}, \\ \varepsilon_4 &= \sqrt{(1 - \gamma) \varepsilon_3^2 + \kappa (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2\gamma (1 + \varepsilon_2) \varepsilon_3}, \\ \varepsilon_5 &= \sqrt{(1 - \gamma) \varepsilon_4^2 + \kappa (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 - 2\gamma (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \varepsilon_4}, \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

и т. д.

Как видно из решения (7-5), для определения расхода в каком-либо ответвлении необходимо вычислить расходы во всех предыдущих ответвлениях. Достоинством метода расчета является его наглядность (т. е. простая интерпретация физических явлений при распределении). Кроме того, в расчете учтены все

основные сопротивления, включая сопротивление трения питающего канала. Как показывает сопоставление расчета с данными экспериментов, допущения, сделанные при выводе формул, практически не отразились на точности результата.

Метод Хака применительно к питающим каналам переменного сечения развил И. Главач [75].

В то же время при большом числе ответвлений рекуррентные формулы становятся громоздкими. Решение (7-5) не позволяет производить анализ конструкций электрических машин в общем виде. Анализ приходится выполнять численно, придавая те или иные значения параметрам системы. Указанные особенности побудили исследователей к поискам иных, более общих решений.

7-4. Дифференциальное уравнение распределения

Впервые упрощенное дифференциальное уравнение распределения, его решение и пути уточнения дал Д. Братт [67]. Результаты математического исследования Братта экспериментально проверил и подтвердил К. Фейхгеймер [70] применительно к турбогенераторам с многоструйными схемами вентиляции. Впоследствии это направление было развито.

При составлении дифференциального уравнения дискретный процесс распределения заменяется эквивалентным непрерывным (рис. 7-3). Моделью явления в этом случае служит щель вдоль всего питающего канала, причем сечение щели равно сумме сечений всех ответвлений, т. е.

$$\delta L = NF, \quad (7-6)$$

где δ — ширина щели.

Дифференциальное изменение статического давления в питающем канале

$$dp = -\frac{\rho}{2} d(\omega^2) - \lambda \frac{\rho}{2} \frac{dx}{D} \omega^2. \quad (7-7)$$

Первый член правой части (7-7) описывает изменение статического давления в связи с изменением динамического. Знак минус означает при этом, что с уменьшением динамического давления в питающем канале статическое давление возрастает. Из этого увеличения следует вычесть необратимые потери давления в питающем канале. Таким образом для нагнетательных систем знаки членов уравнения (7-7) окажутся в итоге различными. Отметим здесь же, что для вытяжных систем, у которых статическое давление в сборном канале (положительное) препятствует движению в ответвлениях, рост необратимых потерь в направлении от закрытого торца питающего канала к открытому суммируется с увеличением потерь статического давления из-за увеличения скорости в этом же направлении, т. е. скорость в ответвлениях в направлении открытого торца увеличивается

одновременно по двум причинам. Иными словами, в вытяжных схемах необратимые потери никак не компенсируют неравномерность распределения, а лишь усугубляют ее. Формально это выражается в том, что итоговые знаки членов уравнения (7-7) снова совпадают.

Вернемся, однако, к нагнетательным схемам. Дополним уравнение давлений уравнением неразрывности:

$$Sd\omega = \delta dx v_3, \quad (7-8)$$

где v_3 — скорость истечения из эквивалентной щели в точке с координатой x .

В силу идеальности эквивалентной щели скорость истечения из нее определяется уравнением ($\xi = 1,0$):

$$p = \frac{\rho}{2} v_3^2. \quad (7-9)$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dx} = \rho v_3 \frac{dv_3}{dx},$$

но из (7-8)

$$\frac{dv_3}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{S}{\delta} \frac{d\omega}{dx} \right) = \frac{S}{\delta} \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(\frac{S}{\delta} \frac{d\omega}{dx} \right) \left(\frac{S}{\delta} \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = \rho \left(\frac{S}{\delta} \right)^2 \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Подставим полученное значение в уравнение (7-7):

$$\frac{dp}{dx} = -\rho\omega \frac{d\omega}{dx} - \lambda \frac{\rho}{2D} \omega^2.$$

Получим:

$$\frac{d\omega}{dx} \frac{d^2\omega}{dx^2} + a_1\omega \frac{d\omega}{dx} + a_2\omega^2 = 0, \quad (7-10)$$

где

$$a_1 = \left(\frac{\delta}{S} \right)^2, \quad a_2 = \frac{\lambda}{2D} \left(\frac{\delta}{S} \right)^2.$$

Уравнение (7-10) есть уравнение процесса непрерывного распределения среды из питающего канала с учетом его сопротивления. Это уравнение относительно неизвестной скорости в питающем канале ω второго порядка и второй степени, т. е. нелинейное. Его решение не может быть представлено в общем виде. Однако необходимые расчетные формулы могут быть получены.

7-5. Упрощенное решение дифференциального уравнения

Для получения решения уравнения (7-10) поступим следующим образом. Вначале исключим из него член, содержащий нелинейность $a_2\omega^2$, что равносильно допущению о пренебрежимо

малой величине сопротивления питающего канала. Затем полученное решение линейного уравнения

$$\frac{dw}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} + a_1 w \frac{dw}{dx} = 0 \quad (7-11)$$

преобразуем таким образом, чтобы отразить в нем роль сопротивления питающего канала.

Допущение о пренебрежимо малой величине сопротивления питающего канала основано на анализе значительного экспериментального и расчетного материала и, как будет показано ниже, во многих случаях не приводит к практически ощутимой ошибке в конечном результате.

Таким образом, будем искать решение уравнения $\frac{d^2w}{dx^2} + a_1 w = 0$ с граничными условиями:

$$\text{при } x=0 \quad w=0;$$

$$\text{при } x=L \quad w=\omega_N.$$

Это решение, как известно, имеет вид

$$w = C_1 \cos \frac{\delta}{S} x + C_2 \sin \frac{\delta}{S} x$$

и при $C_1=0$ и $C_2 = \frac{\omega_N}{\sin(\delta L/S)}$ дает

$$w = \omega_N \frac{\sin \frac{\delta}{S} x}{\sin \frac{\delta}{S} L}. \quad (7-12)$$

Найдем теперь скорость истечения из эквивалентной щели. Согласно (7-6)

$$v_3 = \frac{S}{\delta} \frac{dw}{dx} = \frac{S}{\delta} \frac{\delta}{S} \omega_N \frac{\cos \frac{\delta}{S} x}{\cos \frac{\delta}{S} L} = \omega_N \frac{\cos \frac{\delta}{S} x}{\cos \frac{\delta}{S} L}. \quad (7-13)$$

Обозначим $\delta L/S = K_3$ и, учитывая, что K_3 есть отношение сечения эквивалентной щели к сечению питающего канала, назовем его пропорцией сечения [77]. Тогда решение (7-13) можно представить в виде:

$$v_3 = \omega_N \frac{\cos K_3 \frac{x}{L}}{\sin K_3}. \quad (7-14)$$

Переход от эквивалентной щели к реальным, дискретно распределенным ответвлениям требует учета трех факторов.

1. Коэффициент местного сопротивления реального ответвления в отличие от идеальной щели не равен единице. По этой причине уравнению (7-9) будет теперь соответствовать уравнение

$$\rho = \xi \frac{\rho}{2} v^2 = \frac{\rho}{2} \xi \left(\frac{q}{F} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{F/V\xi} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{F_r} \right)^2 = \frac{\rho}{2} v_r^2, \quad (7-15)$$

где q — расход в ответвлении; F_r — некоторое условное сечение, называемое редуцированным; v_r — условная скорость или скорость в редуцированном сечении.

Введение редуцированного сечения позволяет сделать выражения (7-9) и (7-15) тождественными. Отсюда следует, что решение (7-14) может быть распространено на скорость v_r , переход от которой к истинной скорости v осуществляется по формуле:

$$v = \frac{v_r}{\sqrt{\xi_{\Sigma}}}. \quad (7-16)$$

2. Реальные ответвления в отличие от непрерывной щели расположены дискретно. По этой причине использование решения (7-14) возможно лишь в том случае, если переменной координате x будет поставлен в соответствие порядковый номер ответвления. Тогда отношению x/L должно соответствовать отношение n/N .

3. Реальная пропорция сечения K (в отличие от случая эквивалентной щели) должна определяться как отношение суммарного сечения ответвлений (разумеется, следует брать сумму редуцированных сечений) к сечению питающего канала.

Итак, будем иметь:

$$v_n = \omega_n \frac{\cos K \frac{n}{N}}{\sqrt{\xi_{\Sigma}} \sin K}, \quad (7-17)$$

где

$$K = \frac{\Sigma F_r}{S} = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \frac{F}{V \xi_{n\Sigma}} = f \sum_{n=1}^N \frac{1}{V \xi_{n\Sigma}}. \quad (7-18)$$

Здесь следует иметь в виду, что $\xi_{n\Sigma}$ представляет суммарный коэффициент местных сопротивлений данного ответвления, т. е. должен учитывать особенности хода в ответвление и другие аналогичные факторы.

Если принять, что в каждом данном сечении струя расширяется в n ответвлений, то для коэффициента сопротивления расширения при учете сечения самого питающего канала будем иметь:

$$\left(\frac{Fn}{S} - 1 \right)^2 = (fn + 1 - 1)^2 = f^2 n^2.$$

Допустим теперь, что коэффициент сопротивления трения λ_d ответвлений постоянен и не зависит от искомой скорости (на самом деле такая зависимость, разумеется, существует, но она незначительна), т. е.

$$\xi = \lambda_d \frac{l}{d} = \text{const.}$$

Тогда с учетом входа с поворотом ($\xi_{\text{вх}} \approx 1,0$) и с учетом выхода ($\xi_{\text{в}} \approx 1,0$) для суммарного сопротивления получим:

$$\xi_{n\Sigma} = f^2 n^2 + \xi + 2. \quad (7-19)$$

Последняя формула, получившая надежное экспериментальное подтверждение, может трактоваться более углубленно (например, с учетом фактора эжектирования струи при входе), но в рамках теории электрических машин в этом нет необходимости.

Итак,

$$\begin{aligned} K &= f \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{f^2 n^2 + (2 + \xi)}} = f \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{f^2 N^2 \left[\left(\frac{n}{N} \right)^2 + (2 + \xi) s^{*2} \right]}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\left(\frac{n}{N} \right)^2 + (2 + \xi) s^{*2}}. \quad (7-20) \end{aligned}$$

Вернемся вновь к непрерывному представлению распределения $\frac{n}{N} = \frac{x}{L}$. Обозначим $(2 + \xi) s^{*2} = m^2$, $\frac{x}{L} = y$. Тогда $y = 0 \div 1,0$,

$$\Delta y = \frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{N}$$

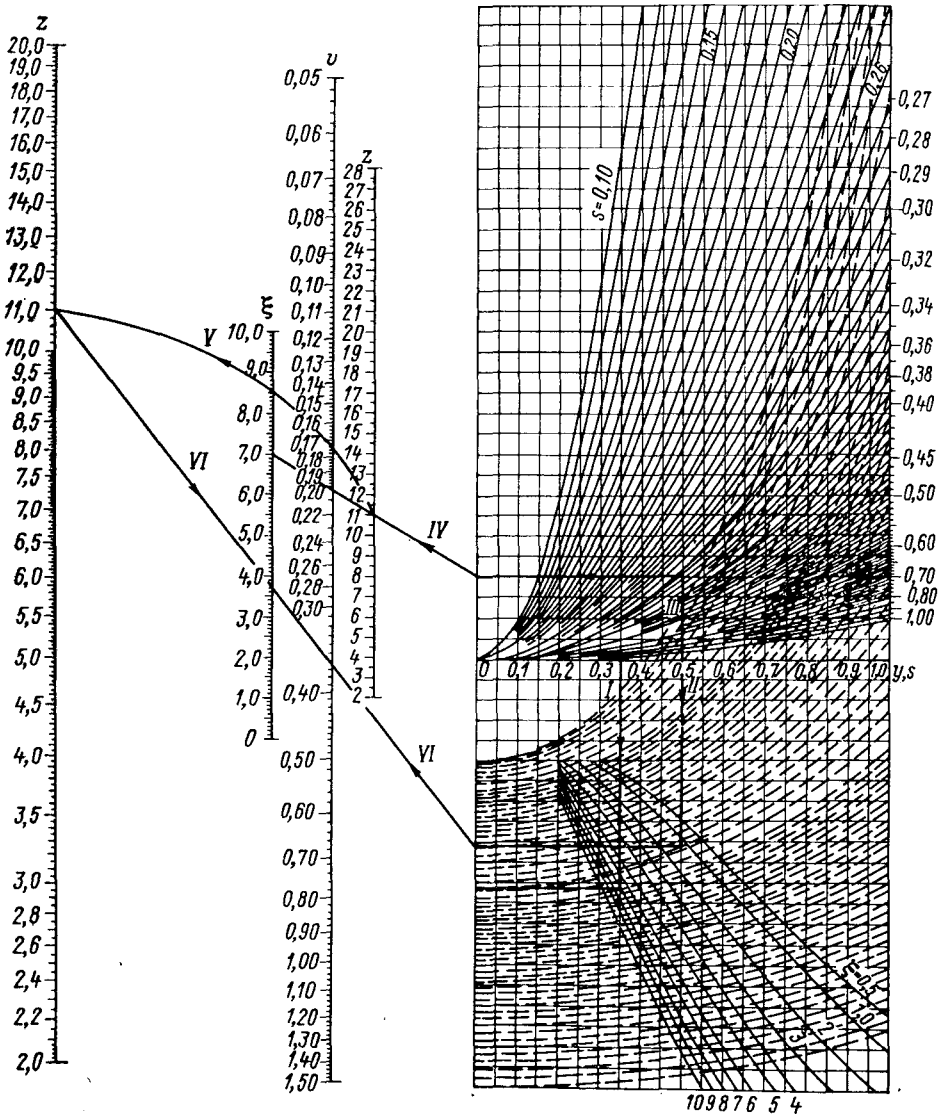
и

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\Delta y}{\sqrt{y^2 + m^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2 + m^2}} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (2 + \xi) s^{*2}}}{\sqrt{(2 + \xi) s^{*2}}}. \quad (7-21)$$

Для скорости в ответвлениях теперь получим [65]:

$$v_n = \omega_N \frac{s^* \cos K \frac{n}{N}}{\sqrt{\left(\frac{n}{N} \right)^2 + (2 + \xi) s^{*2} \sin K}}. \quad (7-22)$$

Дополним полученный результат формулой для расчета скоростей в ответвлениях вытяжной системы распределения. Поскольку дифференциальное уравнение в этом случае отличается от (7-11) только знаком второго члена, в его решении вместо тригонометрических функций окажутся гиперболические.



Пример расчета: $x = 0,5$; $s = 0,35$; $\xi = 7$

Рис. 7-4. Номограмма для расчета нагнетательных схем ($y=0,5$)

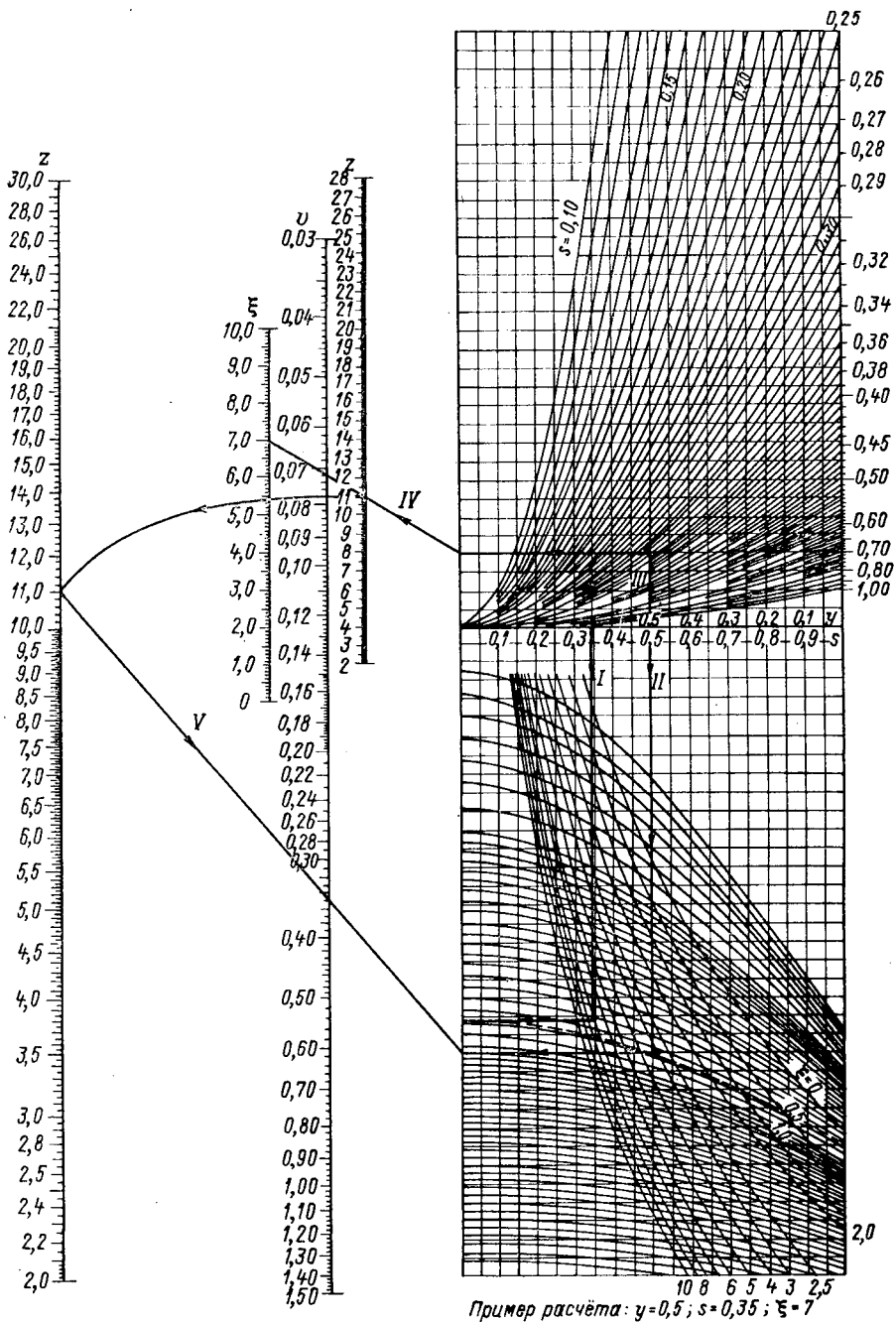


Рис. 7-5. Номограмма для расчета вытяжных схем

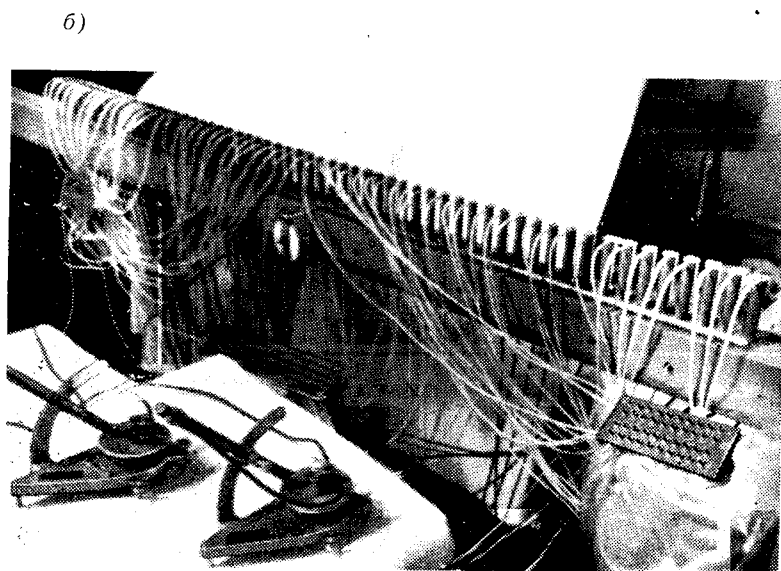
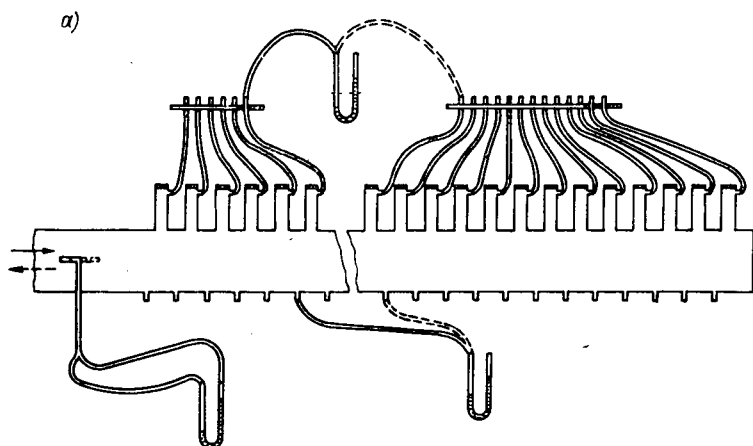


Рис. 7-6. Универсальная модель распределения: а — схема модели; б — внешний вид модели

Таким образом, для вытяжных систем

$$v'_n = \omega_n \frac{s^* \operatorname{ch} K \frac{n}{N}}{\operatorname{sh} K \sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 + (2 + \xi) s^{*2}}} \quad (7-23)$$

Формулы (7-22) и (7-23) позволяют определить скорость непосредственно в любом ответвлении. Они могут быть представлены номограммами (рис. 7-4 и 7-5), ключ к использованию которых приведен на рисунках.

Расчет распределения скоростей в ответвлениях по формулам (7-22) и (7-23), поскольку в нем не учтены потери трения в питающем канале, является приближенным. Целесообразная зона применимости такого расчета может быть установлена экспериментально. Для этой цели были исследованы модели статора асинхронной машины, ротора турбогенератора, ротора гидрогенератора и на их основе универсальная модель системы распределения турбогенератора мощностью 800 Мвт, позволяющая варьировать параметры систем распределения в широком диапазоне (рис. 7-6, табл. 7-1).

Результаты экспериментов в их сопоставлении с результатами расчета приведены на рис. 7-7. Как следует из рисунка, расчет распределения по формулам (7-22) и (7-23) в широком диапазоне изменения параметров систем обеспечивает удовлетворительную точность результатов.

Для определения необходимого давления нагнетателя следует найти скорость на входе в питающий канал по величине потребного расхода охлаждающей среды Q , $\omega_N = Q/S$. Затем нужно вычислить скорость в прилежащем ко входу ответвлении, т. е. v_N . После этого может быть определено потребное давление p_{II} :

$$p_{II} = \frac{\rho}{2} [\omega_N^2 + (2 + \xi + f^2 N^2) v_N^2]. \quad (7-24)$$

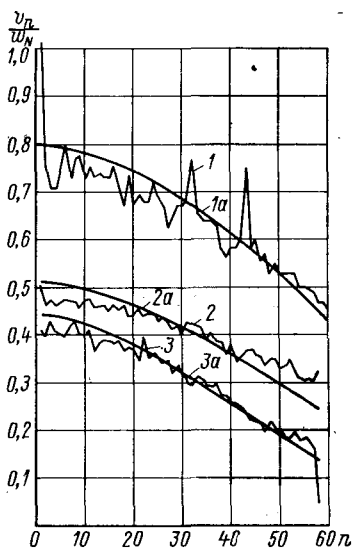


Рис. 7-7. Опытные (1, 2, 3) и расчетные (1а 2а, 3а) кривые распределения скоростей газа по ответвлениям при нагнетательной схеме вентиляции

1, 1 а — $s^* = 0,056$; $\xi = 2,235$; 2, 2 а — $s^* = 0,407$; $\xi = 5,868$; 3, 3 а — $s^* = 0,306$; $\xi = 5,868$

Таблица 7-1

Схема вентиляции	Количество ответвлений	Относительное сечение	Коэффициент местного гидравлического сопротивления ответвлений	Длина участка между ответвлениями, мм
Нагнетательная	60	0,656	2,235	47
»	58	0,407	5,868	47
»	58	0,407	1,188	47
»	58	0,306	5,868	47
»	20	0,158	5,868	47
»	20	0,118	5,868	93
»	7	0,398	1,548	23
»	13	0,152	2,720	1660
Вытяжная	70	0,562	1,200	47
»	60	0,656	1,200	47
»	58	0,407	3,488	47
»	7	0,398	1,548	23

В тех случаях, когда целесообразно уравнивать скорости в ответвлениях путем изменения конструкции питающего канала, необходимо, как это следует из приведенного анализа, уменьшить сечение питающего канала в направлении движения струи по закону $S_n = S_N \frac{n}{N}$.

7-6. Учет сопротивления питающих каналов

В питающих каналах систем распределения проявляются по крайней мере два вида сопротивления: сопротивление трения и сопротивление прохода струи через зону ответвления. Оба вида сопротивления необратимо уменьшают полное давление струи в питающем канале, что выражается в уменьшении избыточного статического давления в данном сечении. Таким образом, в нагнетательных схемах, в которых избыточное статическое давление обуславливает истечение в ответвления, потери полного давления в некоторой степени компенсируют эффект прироста статического давления, т. е. уменьшают неравномерность распределения. В вытяжных схемах, в которых циркуляция в ответвлениях обусловлена разрежением в питающем канале, потери полного давления увеличивают разрежение, т. е. усугубляют неравномерность распределения.

В нашей задаче необходимо получить зависимость скоростей в ответвлениях от сопротивления питающего канала. Для этой цели используем решение линейного дифференциального уравнения, которое не учитывает сопротивление питающего канала. Но применяя полученные выше результаты, искусственно увели-

чим коэффициенты сопротивления ответвлений так, чтобы итоговое сопротивление контура питающий канал — ответвление соответствовало действительному.

Физически такой подход равносильно допущению об идеальности питающего канала при условии, что все сопротивления каждого данного ответвления, включая участок питающего канала до этого ответвления, сосредоточены в самом ответвлении. Вносимая при этом ошибка обусловлена неэквивалентностью величины потерь давления на сопротивлениях величине изменения статического давления, полученной из дифференциального уравнения для идеального питающего канала.

Частично учет сопротивления питающего канала проделан при выводе формулы (7-19). Сопоставление полученных при этом результатов с данными опытов позволяет применить этот же прием для учета влияния трения.

Потери трения в питающем канале для автомодельного режима движения, как уже отмечалось,

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \lambda \frac{L_0}{D} \sum_n^N \omega_n^2. \quad (7-25)$$

При допущении

$$\omega_n = \omega_N \frac{n}{N}, \quad (7-26)$$

несколько преуменьшающем роль трения, получим:

$$\sum_n^N \omega_n^2 = \omega_N^2 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 \right]. \quad (7-27)$$

Максимальная сумма в квадратных скобках без первого члена может быть вычислена просто при переходе к непрерывной картине распределения. При этом получим:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 = \int_0^1 (1-y)^2 dy = 0,33 \text{ и}$$

$$\sum_1^N \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 \approx 0,33N. \quad (7-28)$$

Полученное значение, соответствующее ответвлению номер один, убывает примерно по закону четвертой степени в функции длины канала. Допустимость принятой аппроксимации демонстрируется на рис. 7-8. Таким образом,

$$\Delta p_n = \frac{\rho}{2} \xi_0 \omega_N^2 \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4}\right) \right].$$

При переходе к скорости v_n получим:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \frac{\zeta_0}{s^{*2}} \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right] v_n^2.$$

Отсюда

$$\xi_{\text{тр}} = \frac{\zeta_0}{s^{*2}} \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right].$$

и

$$\begin{aligned} \xi_{n\Sigma} &= f^2 n^2 + (2 + \xi) + \frac{\zeta_0}{s^{*2}} \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right] = \\ &= f^2 N^2 \left\{ \frac{n^2}{N^2} + (2 + \xi) s^{*2} + \zeta_0 \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7-29)$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{N}\right)^2 + (2 + \xi) s^{*2} + \zeta_0 \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right]}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0,33\zeta}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{0,33\zeta + (2 + \xi) s^{*2}}{1 - 0,33\zeta}}}{\sqrt{\frac{0,33\zeta + (2 + \xi) s^{*2}}{1 - 0,33\zeta}}} \end{aligned} \quad (7-30)$$

и

$$v_n = \omega_N \frac{s^* \cos K_1 \frac{n}{N}}{\sqrt{\left(\frac{n}{N}\right)^2 + (2 + \xi) s^{*2} + \zeta_0 \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right] \sin K_1}}. \quad (7-31)$$

Для вытяжных схем будем иметь

$$v'_n = \omega_N \frac{s^* \operatorname{ch} K_1 \frac{n}{N}}{\sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 + (2 + \xi) s^{*2} + \zeta_0 \left[1 + 0,33N \left(1 - \frac{n^4}{N^4} \right) \right] \operatorname{sh} K_1}}. \quad (7-31')$$

Теперь может быть оценена ошибка, вносимая при пренебрежении трением в питающем канале.* Относительное влияние сопротивления трения учитывается формулой

$$\bar{\xi}_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{\zeta_0 \left[1 + 0,33N \left(1 + \frac{1}{N^4} \right) \right]}{(2 + \xi) s^{*2} + \frac{1}{N^2}}} \approx \sqrt{\frac{0,33\zeta}{(2 + \xi) s^{*2}}}. \quad (7-32)$$

* В интересах краткости дальнейший анализ проведен для нагнетательных схем. Отметим лишь, что в силу специфики вытяжных схем все параметры, характеризующие неравномерность распределения, получают в применении к этим схемам увеличенные значения.

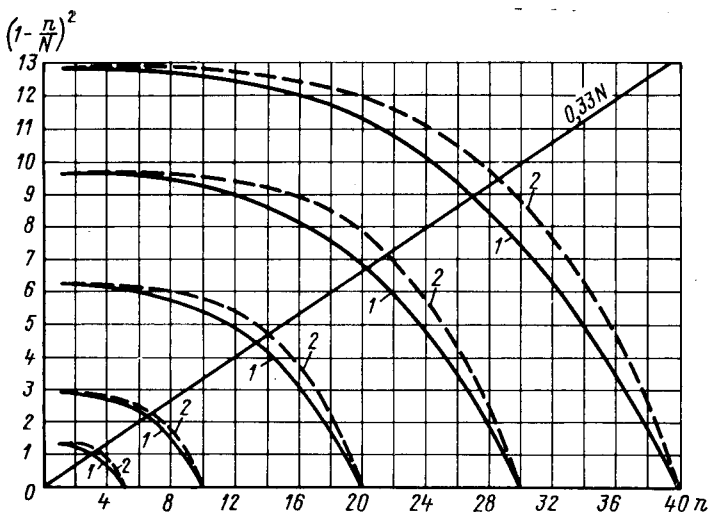
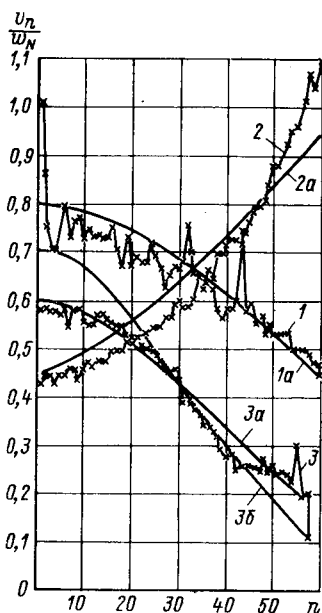


Рис. 7-8. Распределение потерь трения по длине питающего канала, определенное по уточненной (1) и приближенной (2) формулам

Рис. 7-9. Опытные (1, 2, 3) и расчетные (1а, 2а, 3а, 3б) кривые распределения скоростей среды по ответвлениям

1, 1а — нагнетательная схема $s^*=0,656$; $\xi=1,23$; $\zeta=0,56$; 2, 2а — вытяжная схема $s^*=0,656$; $\zeta=0,20$; 3, 3а — нагнетательная схема $s^*=0,407$; $\xi=0,188$; $\zeta=0,74$; 3б — расчет без учета трения



Величина ошибки в долях единицы в нагнетательных схемах равна: для закрытого конца канала

$$v_1^* = \frac{\operatorname{tg} K_1}{\operatorname{tg} K} - 1; \quad (7-33)$$

для открытого конца канала

$$v_N^* = \frac{\sin K_1 \sqrt{0,33\xi + (2 + \xi) s^{*2}}}{\sin K \sqrt{(2 + \xi) s^{*2}}}. \quad (7-34)$$

Кривые сопоставления данных опыта и расчета с учетом трения приведены на рис. 7-9.

Как видно, в целом ряде практических случаев трение в питающем канале играет существенную роль. Именно трение при прочих равных условиях деформирует картину распределения от крайне неравномерной с максимумом скорости в зоне первого ответвления до крайне неравномерной с максимумом скорости в зоне последнего ответвления.

7-7. Анализ систем распределения

Анализ полученных решений позволяет определить зону целесообразных геометрических размеров систем распределения.

Как следует из предыдущего, при некоторых соотношениях скорость в ответвлении N получает нулевое значение. Назовем

это явление первым кризисом течения. Будем считать, что в неблагоприятных условиях первого кризиса и более усугубленных условиях система распределения не отвечает своему прямому назначению, поскольку в одном ответвлении или группе ответвлений не циркулирует охлаждающая среда.*

При увеличении трения в питающем канале картина распределения вначале выравнивается, затем деформируется до нулевого значения скорости в ответвлении 1 (рис. 7-3). Назовем это явление вторым кризисом течения и будем считать, что в неблагоприятных условиях второго кризиса и в более усугубленных условиях система распределения также становится нецелесообразной.

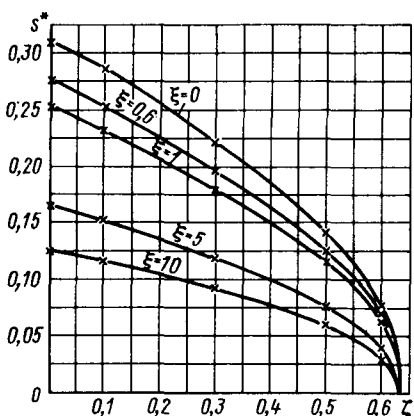


Рис. 7-10. Зависимость критического сечения от коэффициента сопротивления питающего канала

При увеличении трения в питающем канале картина распределения вначале выравнивается, затем деформируется до нулевого значения скорости в ответвлении 1 (рис. 7-3). Назовем это явление вторым кризисом течения и будем считать, что в неблагоприятных условиях второго кризиса и в более усугубленных условиях система распределения также становится нецелесообразной.

* В отдельных случаях возможна инверсия — обратное течение в ответвлениях.

Поскольку первый кризис выражается условием $v_N=0$, критические параметры системы могут быть получены исходя из соотношения $v_N>0$ или $\text{ctg } K_1>0$, что следует из формулы (7-31). Отсюда

$$s^* > \sqrt{\frac{4(1 - 0,33\xi) \exp(\pi \sqrt{1 - 0,33\xi}) - 0,33\xi [\exp(\pi \sqrt{1 - 0,33\xi}) - 1]}{\exp(\pi \sqrt{1 + 0,33\xi}) - 1} (2 + \xi)} \quad (7-35)$$

Решение (7-35) представлено в виде графиков на рис. 7-10. Как видно из рисунка, увеличение сопротивления ответвления при неизменных коэффициентах трения ξ приводит к уменьшению критического (т. е. практически целесообразного) относительного сечения s^* . Точки пересечения кривых с осью ординат соответствуют случаям пренебрежимо малого трения в питающем канале. В этих случаях относительное сечение не должно быть меньше 0,3 при малом ξ .

Точка пересечения кривых с осью абсцисс, соответствующая значению $\xi=0,63$, означает, что при больших коэффициентах трения питающего канала первый кризис не наступает при любых значениях сопротивлений ξ .

Для получения количественных характеристик второго кризиса составим баланс полных давлений на входе в питающий канал и в конце его, считая, что давление целиком расходуется на трение. Будем иметь:

$$\omega_N^2 + (2 + \xi) v_N^2 = \xi_0 \sum_1^N \omega_n^2 = 0,33\xi_0 N \omega_N^2. \quad (7-36)$$

Отсюда

$$1 + (2 + \xi) \left(\frac{v_N}{\omega_N} \right)^2 = 0,33\xi_0 N.$$

Если принять (см. рис. 7-3) $v_{\text{ср}} = \frac{v_N}{2}$, то получим

$$\frac{v_N}{\omega_N} = \frac{2v_{\text{ср}}}{\omega_N} = 2s^*$$

и

$$\xi_0 = \frac{1 + (2 + \xi) 4s^{*2}}{0,33N}; \quad \xi = \frac{1 + (2 + \xi) 4s^{*2}}{0,33}. \quad (7-37)$$

Полученное решение дает следующие результаты для питающего канала:

Относительное сечение	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Критическое значение коэффициента сопротивления	3,20	4,25	5,95	8,35	11,4	15,0

Для получения критических значений коэффициентов сопротивления на длине одного шага по питающему каналу $\xi_{\text{критич}}$

нужно разделить приведенные значения на число ответвлений в системе распределения N .

Оба кризиса были получены экспериментально. Первый кризис наблюдался при параметрах системы: $N=20$; $s^*=0,118$; $\xi=5,868$; $\zeta=0,25$. Второй кризис при $s^*=0,152$; $L_0=1660$ мм; $d=5,73$ мм; $\xi=1,72$; $\zeta=85$.

Изложенная методика позволяет определить коэффициент сопротивления питающего канала для случаев равномерного распределения:

$$\omega_N^2 = 0,33\zeta\omega_N^2,$$

что дает

$$\zeta = \frac{1}{0,33} = 3 \quad \text{и} \quad \zeta_0 = \frac{3}{N}. \quad (7-38)$$

При практическом проектировании систем распределения стремятся уйти от кризисных зон, т. е. уменьшить неравномерность распределения. Из изложенного следует, что коэффициент неравномерности скоростей, как отношение наибольшей и наименьшей скоростей в ответвлениях, равен:

а) для нагнетательных схем

$$\bar{v} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{1 + (2 + \xi)s^{*2} + \zeta_0}}{\cos K_1 \sqrt{(2 + \xi)s^{*2} + \zeta_0 (1 + 0,33N)}}; \quad (7-39)$$

б) для вытяжных схем

$$\bar{v}' = \frac{v'_N}{v'_1} = \frac{\sqrt{(2 + \xi)s^{*2} + \zeta_0}}{\operatorname{ch} K_1 \sqrt{1 + (2 + \xi)s^{*2} + \zeta_0 (1 + 0,33N)}}. \quad (7-40)$$

Э. И. Гуревич [19] упростил формулу (7-39) до вида:

$$\bar{v} \cong \frac{\sqrt{a+1}}{\cos \ln [\sqrt{a} + \sqrt{a+1}]}, \quad (7-41)$$

где $a = \frac{1}{(2 + \xi)s^{*2}}$.

При оценке неравномерности по формуле (7-41) значения коэффициента окажутся несколько преувеличенными.

7-8. Пример расчета распределения скоростей

Пусть дана нагнетательная система распределения со следующими значениями параметров: $N=58$; $\xi=0,188$; $\zeta=0,0125$; $s^*=0,408$.

Определим относительные расходы в ответвлениях, пользуясь рекуррентными формулами (7-5). Имеем:

$$\gamma = \frac{f^2}{\xi\Sigma} = \frac{1}{(s^*N)^2} = \frac{1}{(0,408 \cdot 58)^2} = 2,188 = 0,82 \cdot 10^{-3}.$$

Отсюда

$$\kappa = \gamma_{\xi_0}^2 = 0,82 \cdot 10^{-3} \cdot 0,125 \cdot 10^{-1} = 0,103 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_1 = 1;$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + 0,103 \cdot 10^{-4} - 0,82 \cdot 10^{-3}} = 0,998;$$

$$\varepsilon_3 = \sqrt{0,99918 \cdot 0,998^2 + 0,103 \cdot 10^{-4} (1 + 0,998) - 0,164 \cdot 10^{-2} \cdot 0,998} = 0,997;$$

$$\varepsilon_{58} = \sqrt{0,99918 \cdot 0,329^2 + 0,103 \cdot 10^{-4} (39,798 + 0,329)^2 - 0,164 \cdot 10^{-2} \cdot 39,798 \cdot 0,329} = 0,321.$$

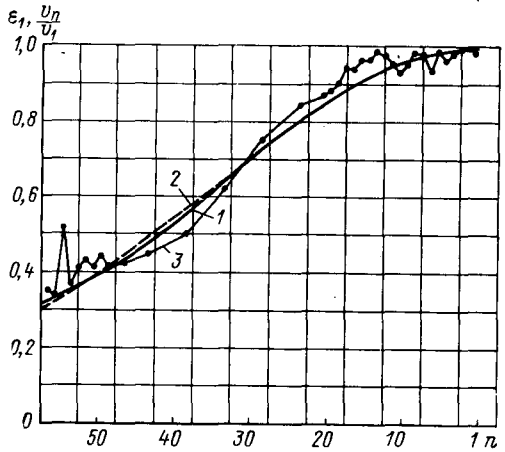


Рис. 7-11. Расчет распределения

1 — расчет по рекуррентным формулам; 2 — расчет по формуле (7-31); 3 — данные измерений

Результаты расчета нанесены на график рис. 7-11 (кривая 1). Для построения кривой, необходимо вычислить все 58 значений относительного расхода.

Определим скорости в ответвлениях по формулам (7-30) и (7-31). Получим:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,33 \cdot 0,0125 \cdot 58}} \times \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{0,33 \cdot 0,0125 \cdot 58 + (2 + 0,188) \cdot 0,408^2}{1 - 0,33 \cdot 0,0125 \cdot 58}}}{\sqrt{\frac{0,33 \cdot 0,0125 \cdot 58 + (2 + 0,188) \cdot 0,408^2}{1 - 0,33 \cdot 0,0125 \cdot 58}}} = 1,1;$$

$$\frac{v_1}{w_N} = \frac{0,408 \cos 1,1}{\sqrt{\left(\frac{1}{58}\right)^2 + (2 + 0,188) \cdot 0,408^2 + 0,0125 \left[1 + 0,33 \cdot 58 \left(1 - \frac{1}{58^4}\right)\right] \sin 1,1}} = 0,178;$$

$$\frac{v_{58}}{w_N} = \frac{0,408 \cos 1,1}{\sqrt{1 + (2 + 0,188) \cdot 0,408^2 + 0,0125 \sin 1,1}} = 0,58; \quad \frac{v_{58}}{v_1} = 0,306.$$

Результаты расчета нанесены на тот же график (кривая 2 на рис. 7-11). Для построения кривой достаточно вычислить три-четыре значения относительной скорости в ответвлениях. Для сопоставления на рис. 7-11 нанесены результаты экспериментального определения скоростей (кривая 3). Как видно из рисунка, оба метода расчета обеспечивают удовлетворительную точность.

Глава восьмая

ВЕНТИЛЯЦИОННЫЙ РАСЧЕТ СИСТЕМ ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛОВ

8-1. Вводные замечания

Методы вентиляционного расчета электрических машин, изложенные выше, основаны на предположении, что вращение ротора машины, создавая полезное давление в отдельных ветвях схемы вентиляции, существенно не изменяет аэродинамическое сопротивление системы. В свое время в основу вентиляционного расчета турбогенераторов было положено допущение о полной независимости циркуляции среды от вращения роторов. Это допущение не приводило к заметному расхождению результатов расчета и опыта.

Подтверждением правильности выдвинутой гипотезы являлся следующий эксперимент. В турбогенераторе с принудительной системой вентиляции измерялись расход и скорости воздуха, когда ротор турбогенератора оставался в покое и когда он вращался с различной скоростью. Результаты измерений сопоставлялись и определялась зависимость картины циркуляции воздуха от скорости вращения ротора. Эта зависимость оказывалась, как правило, весьма незначительной. Для турбогенераторов с радиальными системами вентиляции при увеличении скорости вращения роторов от 0 до 3600 об/мин изменение суммарного расхода не превосходило 4% [70].

Дальнейшее развитие электромашиностроения показало, однако, что распространение принципа независимости вентиляции от вращения ротора на все типы электрических машин является недопустимым. Наибольшее расхождение данных опыта и расчета, основанного на этом принципе, наблюдается в случае явнополюсных синхронных машин с большими проходными сечениями в ободу ротора, машин постоянного тока и асинхронных, имеющих шихтованные якоря и роторы с радиальными вентиляционными каналами. В последние годы положение изменилось и в турбогенераторостроении в связи с увеличением расходов охлаждающей среды в каналах роторов.

Иными словами, с фактором вращения ротора нельзя не считаться, когда в каналах самого ротора циркулирует значительная часть суммарного расхода охлаждающей среды.

Есть по крайней мере три аспекта вентиляционного расчета электрических машин, в свете которых учет вращения является важным. Во-первых, иначе невозможно определить скорости среды в самих вращающихся каналах. Во-вторых, лишь с учетом вращения могут быть вычислены гидравлические потери внутри каналов и в зависимости от их величины потери энергии, затрачиваемой на циркуляцию. Сразу же следует подчеркнуть, что решения этих задач тесно связаны между собой. Во всяком случае точный расчет потерь энергии без учета зависимости гидравлических потерь от фактора вращения выполнен быть не может.

Простейшим учетом вращения является введение в схему вентиляции внешних аэродинамических характеристик вращающихся каналов в предположении, что внутреннее сопротивление каналов не отличается от их сопротивления в состоянии покоя. Эта задача решена в предыдущей главе.

Сложнее учесть влияние центробежного поля на сопротивление каналов. Такая задача решалась в разное время для машин разных типов, но решения были основаны на экспериментальных данных по эксплуатируемым электрическим машинам и сводились к введению поправочных коэффициентов в формулы, полученные для неподвижных каналов [64].

Лишь в последние годы влияние вращения ротора на аэродинамические характеристики машины исследовалось в общей постановке, позволяющей распространять полученные результаты на машины разных типов.

В настоящей главе анализ основных особенностей циркуляции охлаждающих сред во вращающихся каналах произведен в достаточно полном объеме с учетом новейших исследований в Советском Союзе и за рубежом, а также с учетом тех естественных затруднений, которые может вызвать у читателя-электрика сложность и новизна некоторых физических представлений.

8-2. Вращающийся канал — типичный элемент конструкции электрической машины

Вентиляционные каналы вращающихся роторов и якорей электрических машин всегда имеют радиальную ориентацию. В простейшем случае, когда каналы образованы вентиляционными распорками между пакетами активной стали (якорь машины постоянного тока, ротор асинхронного двигателя), все ограничения (стенки) каналов направлены по радиусам (рис. 8-1). Шихтованные ободы гидрогенераторов и крупных синхронных машин имеют каналы между пакетами стали приблизительно того же типа, что и на рис. 8-1, а также каналы между отдельными листами стали в связи с их тангенциальным смещением (рис. 8-2). В отдельных случаях вращающиеся каналы могут

быть выполнены с поворотами, внезапными сужениями и расширениями. Последнее характерно для систем жидкостного, например водяного, охлаждения.

Существует принципиальное различие особенностей течения в каналах, параллельных и непараллельных оси вращения. Его причина заключается в том, что ускорения и силы Кориолиса проявляются лишь в тех случаях сложного движения, когда вектор относительной скорости непараллелен вектору угловой скорости. Как мы увидим ниже, вентиляционные каналы роторов чаще всего перпендикулярны оси вращения, т. е. подвержены наибольшему влиянию кориолисовых сил.

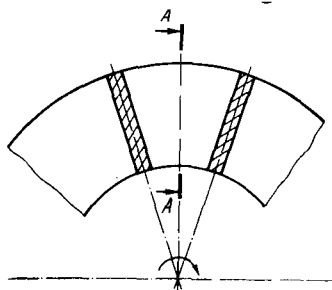


Рис. 8-1. Канал с радиальными стенками

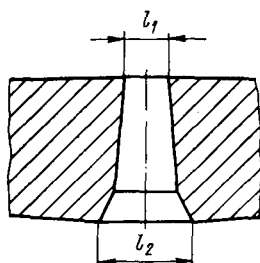
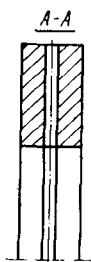


Рис. 8-2. Канал с параллельными стенками

Оба эти обстоятельства — радиальная ориентация стенок каналов и их перпендикулярность оси вращения — значительно облегчают анализ весьма сложного явления циркуляции во вращающихся системах.

8-3. Абсолютное и относительное движение

Движение охлаждающей среды в каналах вращающегося ротора является сложным. По отношению к неподвижному наблюдателю или, что то же, по отношению к неподвижным опорам вала ротора параметры движения частицы: траектория, скорость, ускорение — величины абсолютные. Компонентами абсолютных величин являются параметры переносного и относительного движений.

Переносное движение — это вращательное движение ротора. Строго говоря, переносным движением является движение той точки сечения канала, через которую в данный момент проходит исследуемая частица жидкости.

Относительное движение — это движение среды относительно наблюдателя, расположенного во вращающейся системе координат, или, проще говоря, движение среды относительно стенок канала.

При исследовании сложного движения необходимо иметь в виду некоторые основные положения механики. Важнейшим из них является следующее:

абсолютная производная по времени от вектора равна геометрической сумме относительной производной того же вектора и векторного произведения вектора угловой скорости вращения относительной системы координат на дифференцируемый вектор:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da'}{dt} + \omega \times a. \quad (8-1)$$

Из данного определения следует:

$$c_a = c_e + c_r = u + c_r = \omega \times r + c_r \quad (8-2)$$

абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной (т. е. окружной) и относительной (т. е. относительно стенок канала) скоростей.

Кроме того,

$$w_a = w_e + w_r + w_k, \quad (8-3)$$

абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и поворотного или кориолисова ускорений.

При этом относительное ускорение

$$w_e = \omega \times (\omega \times r) \quad (8-4)$$

и кориолисово ускорение

$$w_k = 2\omega \times c_r = 2\omega \times c_r, \quad (8-5)$$

где c_r — скорость относительного движения.

Анализ движения среды в канале чаще всего целесообразно производить в системе отсчета, по отношению к которой движение можно считать установившимся. Однако совсем отвлечься от абсолютного движения нет возможности, поскольку энергетические характеристики движения с вращением могут быть определены при обязательном рассмотрении энергии переносного движения.

8-4. Абсолютное движение идеальной жидкости есть движение безвихревое

Договоримся вначале отвлечься от проявлений вязкости жидкости, т. е. от касательных напряжений, и проведем анализ в рамках концепции идеальной жидкости.

Заметим, что при движении жидкости в канале, который вращается вокруг неподвижной оси, значение интеграла уравнения Эйлера вдоль линии тока (§ 4-7) не вполне характеризует движение. Существенно определить также изменение энергии поля

в плоскости, перпендикулярной линии тока, т. е. в направлениях нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{m} (рис. 8-3).

Уравнение Эйлера в проекциях на оси так называемой естественной системы координат (рис. 8-3) применительно к абсолютной скорости частицы жидкости имеет вид*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}; \\ \frac{\partial c_n}{\partial t} + c \frac{\partial c_n}{\partial s} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}; \\ \frac{dc_m}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m}. \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

Здесь следует иметь в виду, что в принятой системе координат направление s совпадает с направлением абсолютной скорости

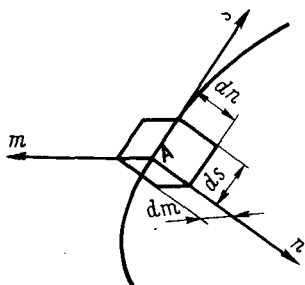


Рис. 8-3. Вращающаяся система отсчета

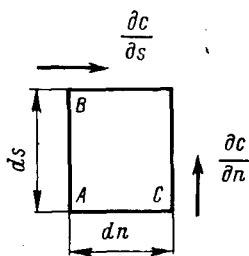


Рис. 8-4. К определению вращения частицы жидкости

рости \mathbf{c} , в связи с чем проекции \mathbf{c} на оси \mathbf{n} и \mathbf{m} равны нулю. Но производные этих составляющих в общем случае не равны нулю и в связи с изменением \mathbf{c} во времени и пространстве через промежуток времени dt могут иметь конечные значения. Последнее утверждение не относится лишь к производной $\frac{\partial c_m}{\partial s}$, так как в направлении $d\mathbf{m}$ вдоль пути ds не может быть изменений (в отличие от направления dn) — рассматриваемое приращение пути находится в соприкасающейся плоскости.

Рассмотрим теперь энергию струи

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}$$

* Для упрощения уравнений действие силы тяжести объединено с действием давления (подробнее см. § 4-7).

и подставим результаты дифференцирования H по трем направлениям координатных осей (т. е. производные dp/ds , dp/dn и dp/dm) в систему (8-6). Получим:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} = 0; \quad (8-7)$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial n} - c \left(\frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial c_n}{\partial s} \right) = 0; \quad (8-8)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial m} - c \frac{\partial c}{\partial m} = 0. \quad (8-9)$$

Так как в качестве энергии струи было взято уравнение Бернулли, т. е. интеграл уравнения Эйлера вдоль линии тока, то, как и следовало ожидать, оказалось [формула (8-7)], что для установившегося движения ($dc/dt=0$) энергия вдоль траектории движения не изменяется ($dH/ds=0$).

В то же время из уравнений (8-8) и (8-9) следует, что в направлениях, перпендикулярных линиям тока, изменение энергии в установившемся движении равно $c \left(\frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial c_n}{\partial s} \right)$ и $c \frac{\partial c}{\partial m}$.

Для выяснения физического смысла величин, дающих меру изменения энергии, рассмотрим проекцию частицы жидкости $ds \cdot dn \cdot dm$ на плоскость, содержащую ds и dn (рис. 8-4). Скорость точки c относительно точки A равна $\frac{\partial c}{\partial n} dn$. Отсюда величина

$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{dc}{dn} \frac{1}{n}$ представляет собой среднюю угловую скорость вращения участка dn вокруг оси, параллельной dm . Аналогично dc_n/ds выражает среднюю угловую скорость AB вокруг оси, параллельной dm . Полусумма обеих величин представляет собой, таким образом, среднюю угловую скорость бесконечно малой частицы жидкости вокруг оси, параллельной dm :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial c_n}{\partial s} \right) = \omega_m.$$

Для вращения вокруг оси, параллельной dn , получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial n} = \omega_n.$$

Таким образом, система уравнения для установившегося движения жидкости имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} g \frac{\partial H}{\partial s} &= 0; \\ g \frac{\partial H}{\partial n} - 2c\omega_m &= 0; \\ g \frac{\partial H}{\partial m} - 2c\omega_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

Вдоль каждой линии тока энергия потока является постоянной: в любом нормальном направлении изменение энергии равно произведению скорости в точке на ротацию поля (вихрь) в этой точке вокруг оси, проходящей через данную точку и перпендикулярной рассматриваемому направлению.

Полученная система уравнений позволяет сделать другой важный вывод: *в безвихревом потоке ($\omega_m = \omega_n = 0$) энергия всей массы жидкости имеет одну и ту же величину, т. е. в безвихревом поле уравнение Бернулли представляет интеграл уравнения Эйлера, взятый в произвольном направлении.**

Этот результат может быть получен непосредственно. Если предположить, что в поле рассматриваемых векторов отсутствует ротация, то сразу же окажется, что постоянная уравнения Бернулли имеет неизменное значение для всего исследуемого поля.

В самом деле, если $\text{rot } c = 0$, то вектор c является градиентом некоторого скаляра $c = \text{grad } \varphi$, т. е. имеет потенциал, равный φ . Но тогда, как легко показать [55], уравнение Бернулли является интегралом уравнения Эйлера не только вдоль линии тока, но и в любом другом направлении. Важность этого вывода заключается не только в том, что простые заключения о величине энергии жидкости могут быть распространены на весьма широкий класс так называемых потенциальных течений, но и в том, что может быть доказана принципиальная консервативность самих потенциальных полей.

Оказывается, достаточно убедиться, что поле скоростей свободно от вращений лишь в один фиксированный момент времени, чтобы утверждать, что оно будет таковым постоянно, если жидкость не обладает трением и действующая система сил обладает потенциалом.

Соответствующая теорема [55], данная Лагранжем, может быть сформулирована так: *движению жидкости, свободному от вращений, нельзя сообщить вращения действием на жидкость силой, обладающей потенциалом.*

Силовое поле всегда обладает потенциалом. Исключение составляют лишь силы, вызванные электрическим током в жидкости, которая находится в магнитном поле. Допущение об отсутствии трения будет обсуждено ниже.

Итак, если в какой-то момент времени поле скоростей жидкости не имело вращений, то таким оно и остается в процессе движения. И так как абсолютное движение жидкости во вращающемся канале начинается из состояния покоя, в котором, естественно, нет вращений, то и на всем протяжении канала это движение остается потенциальным, по крайней мере при

* Имеется в виду, что давление, внешнее по отношению к исследуемой системе, неизменно во времени.

отсутствии трения, т. е. в абсолютном движении идеальной жидкости всегда $\omega_m = 0$ и $\omega_n = 0$.

Последнее утверждение позволяет сделать важные выводы о форме относительного движения.

8-5. Относительное движение идеальной жидкости — движение вихревое

Определим ротор вектора абсолютной скорости и в соответствии с выводами предыдущего параграфа приравняем его нулю. Будем иметь

$$\text{rot } \mathbf{c} = \text{rot} (\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{w} + \text{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0.$$

Отсюда

$$\text{rot } \mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{r}.$$

Учитывая, что $\mathbf{w} = \text{const}$ и $\Delta \mathbf{r} = 1$, $\Delta \cdot \mathbf{r} = 3$, получим

$$\text{rot } \mathbf{w} = -2\boldsymbol{\omega}. \quad (8-11)$$

В частности, для составляющей $\text{rot}_z \mathbf{w}$ (ротация в плоскости, перпендикулярной оси вращения) имеем:

$$\text{rot}_z \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2\omega. \quad (8-11')$$

Здесь и далее применена система декартовых координат, в которой, как мы обычно принимали (гл. 3—5), вектор относительной скорости \mathbf{w} имеет составляющие по осям Ox , Oy и Oz , равные u , v и w , т. е. $\mathbf{w} = iu + jv + kw$. Значит, относительная скорость, направленная, например, вдоль оси Ox равна u .

Этот же результат (8-11) можно получить непосредственно. Применим уравнения в форме (8-8) и (8-9) к относительному движению (т. е. попросту будем считать, что принятая естественная система координат вращается с угловой скоростью переносного движения $\boldsymbol{\omega}$). Тогда по аналогии с предыдущим средняя угловая скорость вращения частицы жидкости в относительной системе отсчета будет равна $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$. Но в абсолютном движении вращение отсутствует. Поэтому сумма вращения в относительном движении и вращения в переносном движении равна нулю*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \omega = 0$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2\omega.$$

Таким образом, поле скорости относительного движения идеальной жидкости есть поле вихревое. При вращении канала

* Так как движение потенциальное, к нему применим принцип наложения.

в каком-либо направлении жидкость в нем вращается в противоположном направлении, т. е. как бы обладает абсолютной инерцией по отношению к вращательному движению (рис. 8-5).

Для дальнейшего исследования присовокупим к уравнению (8-11) уравнение неразрывности (ограничиваясь рассмотрением случая плоского потенциального течения):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8-12)$$

Как известно, уравнение неразрывности удовлетворяется не только введением потенциала скорости $u = \partial \phi / \partial x$, $v = \partial \phi / \partial y$, но и системой линий, ортогональных эквипотенциальным линиям, именно системой линий тока: $u = -\partial \psi / \partial y$, $v = \partial \psi / \partial x$. Совмещая последние условия

(с 8-11), получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega. \quad (8-13)$$

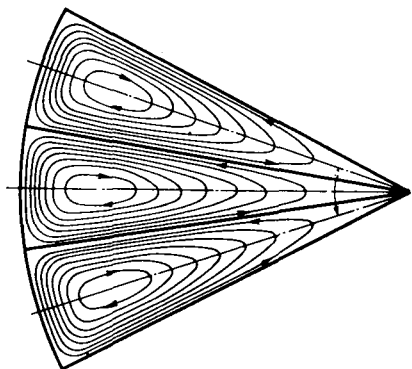


Рис. 8-5 Вихрь идеальной жидкости в каналах вращающейся звезды

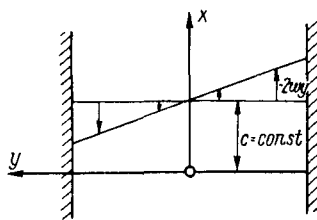


Рис. 8-6. Эюра скорости идеальной жидкости во вращающемся канале

Договоримся для упрощения дальнейшего анализа считать канал длинным [71] и линии тока прямыми, параллельными стенкам канала. Это означает, что действием составляющей вторичного течения (т. е. вихря относительного движения), направленной перпендикулярно к стенкам канала (и линиям тока) мы решили пренебречь и рассмотреть лишь действие составляющей вдоль линии тока, т. е. принимаем $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \text{const} - 2\omega y. \quad (8-14)$$

Константа последнего выражения есть скорость вдоль оси в канале, когда он неподвижен. Эюра скорости во вращающемся канале

щемся канале показана на рис. 8-6. Этот простейший результат анализа позволяет сделать следующие важные выводы.

1. При движении идеальной жидкости во вращающемся канале на движение, которое под действием имеющегося давления возникло бы в случае неподвижного канала, накладывается вторичное вихревое движение, деформирующее эпюру скорости так, что на одной стороне канала итоговая скорость возрастает, на противоположной — убывает.

2. Вихрь относительного движения направлен противоположно вращению переносного движения, т. е. скорость возрастает на сбегавшей стенке канала и убывает на набегающей стенке (сторона нагнетания).

3. Искажение эпюры скорости по отношению к исходной эпюре равномерно распределенной скорости приводит к увеличению средней кинетической энергии относительного движения (сумма квадратов неравномерно распределенной величины всегда больше квадрата среднего значения).

8-6. Уравнение энергии для относительного движения

Уравнение энергии для абсолютного движения было выведено нами выше, в § 6-4, применительно к теории центробежных нагнетателей. Это широко известное турбинное уравнение Эйлера (6-7) полностью определяет суммарную работу, производимую в жидкости вращающимся каналом. Поэтому ограничимся здесь рассмотрением энергии относительного движения, имея в виду большую важность результатов такого анализа.

В относительной системе отсчета движение может быть рассмотрено как стационарное, если отвлечься от переменных во времени возмущений в зоне входа жидкости в канал. Это допущение позволяет получить интеграл уравнения Эйлера и для относительного движения, т. е. при учете сил инерции.

В соответствии с основным принципом механики законы движения среды могут быть применены к вращающимся системам, если к действующим силам присоединить силы инерции — центробежную и кориолисову. Центробежная сила равна $m\omega \times (\omega \times r)$, сила Кориолиса (поворотная) равна $2m\omega \times w = 2m\omega w$ (см. § 8-3 об ускорениях сложного движения).

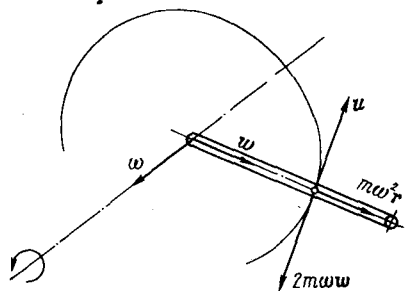


Рис. 8-7. Векторная диаграмма для вращающегося канала

Инерционные силы направлены противоположно соответствующим ускорениям: центробежная сила по радиусу от оси к периферии, поворотная сила против вектора переносной (т. е. окружной) скорости в каждом сечении канала (т. е. на каждом радиусе). Направление скоростей и сил показаны на рис. 8-7.

Итак, для относительного движения элемента массы жидкости имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (8-15)$$

В установившемся движении первый член слева обращается в нуль. Таким образом, уравнение (8-15) отличается от уравнения Эйлера для абсолютного движения (4-15) составляющими $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ и $2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w})$.

Если теперь подобно тому, как это сделано в § 4-7, взять интеграл уравнения (8-15), то силы Кориолиса нужно сразу же исключить из рассмотрения, поскольку они направлены перпендикулярно линиям тока (рис. 8-7) и, следовательно, не имеют составляющих вдоль направления течения. Физически это означает, что в относительном движении силы Кориолиса не изменяют энергию струи.

В § 4-7 составляющие уравнения Эйлера были представлены в форме градиентов некоторых величин, являющихся потенциалами. Здесь остается проделать эту операцию по отношению к члену уравнения $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Формально его можно разложить как двойное векторное произведение векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} :

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{r} \omega^2 = -\text{grad } \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2},$$

так как произведение $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ равно нулю.

Этот же важнейший для понимания энергии относительного движения результат можно получить другим путем. Определим потенциал поля центробежной силы, интегрируя величину силы в направлении ее действия:

$$U_{ц} = -\int \omega^2 r dr = \text{const} - \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

где знак минус означает, что потенциал поля возрастает в направлении, противоположном направлению силы.

Таким образом, интеграл уравнения (8-15) имеет вид:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2}{2} - \frac{r^2 \omega^2}{2} = \text{const}. \quad (8-16)$$

Выражение (8-16) есть не что иное как уравнение Бернулли для установившегося относительного движения в равномерно вращающейся системе отсчета. Легко заметить, что константой уравнения является полное давление (например, внешнего на-

гнетателя) перед входом в канал, т. е. в сечении канала $r=0$ (рис. 8-8).

Если рассмотреть в качестве примера систему, вращающуюся в пространстве с жидкостью, то для нее полное давление перед входом равно нулю, следовательно, и константа уравнения Бернулли есть нуль. Отсюда следует, что статическое давление в каждом сечении канала при его вращении в свободном пространстве

$$\begin{aligned} p_{ст} &= \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 - \frac{\rho}{2} \omega^2 = \\ &= \frac{\rho}{2} (u^2 - \omega^2), \quad (8-17) \end{aligned}$$

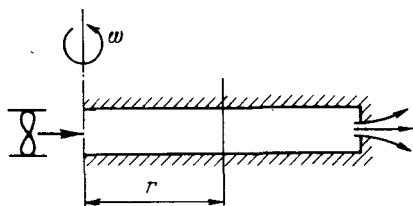


Рис. 8-8. Полное давление во вращающемся канале

где $u = \omega r$ — модуль окружной скорости; ω — модуль относительной скорости.

Это означает, что на оси вращения у входа в канал создается разрежение, равное по величине $\frac{\rho}{2} \omega^2$.

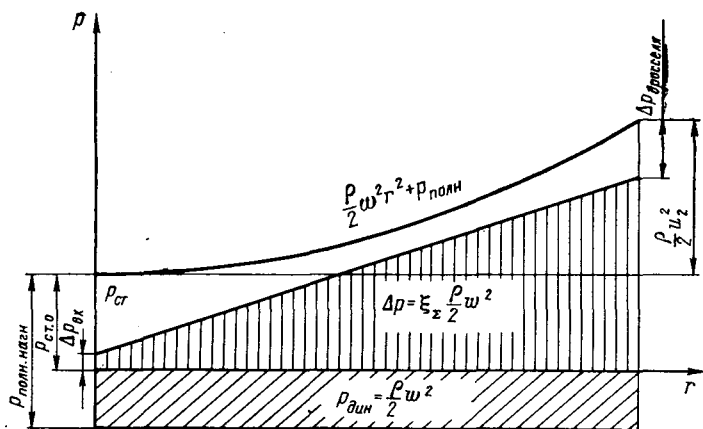


Рис. 8-9. Распределение давлений во вращающемся канале

Полезно подчеркнуть, что скорость струи ω в рассматриваемой системе определяется развиваемым максимальным статическим давлением и суммарным сопротивлением самого канала

$$\frac{\rho}{2} (u^2 - \omega^2) = \xi_{\Sigma} \frac{\rho}{2} \omega^2,$$

откуда

$$\omega = \frac{u}{\sqrt{\xi_{\Sigma} - 1}},$$

где в суммарный коэффициент сопротивления естественно не включен коэффициент сопротивления выхода $\xi_{\text{вых}} = 1$, поскольку динамическое давление струи $\frac{\rho}{2} \omega^2$ рассмотрено в балансе давлений непосредственно.

Вернемся, однако, к анализу уравнения Бернулли. Запишем его в обобщенной форме подобно тому, как это сделано в § 5-5. Будем иметь:

$$\frac{\rho}{2} \omega^2 + p + \Delta p - \frac{\rho}{2} u^2 = \text{const}, \quad (8-18)$$

где Δp — необратимые потери давления на преодоление местных сопротивлений.

Рассмотрим эпюру давлений в системе, показанной на рис. 8-8, учитывая лишь сопротивления входа, трения и дросселя на выходе (рис. 8-9), т. е. имея в виду прямой канал неизменного (до выхода) сечения.

Как видно из рисунка, на всем протяжении канала, когда внутренние потери в нем сравнительно невелики, может существовать избыток статического давления, затрачиваемый на выходе на преодоление сопротивления дросселя.

Уравнение энергии струи в относительном движении является исключительно важным для понимания и исследования процессов течения в каналах вращающихся роторов.

8-7. Анализ экспериментальных данных

Предварительные исследования. Рассмотрение особенностей относительного движения жидкости или газа в канале, который вращается вокруг неподвижной оси, приводит к выводу, что даже в пределах концепции идеальной жидкости затраты энергии в канале должны возрасти за счет вторичного вихревого движения. Такой вывод вытекал уже из общей постановки Г. Ламба [40], исследования Р. Мизеса [80] и фундаментальной работы В. Кухарского [79]. Естественно было предположить, что влияние вязкости приводит к еще большим затратам энергии по сравнению с рассчитанным по вихревой теории Кухарского.

Подтверждение теоретических выводов в столь сложном случае могло быть получено лишь на основе экспериментальных данных. В качестве первого шага в этом направлении Х. Фетте [71] в 1933 г. в институте гидродинамических исследований, в Геттингене под руководством Л. Прандтля провел измерение скоростей и давлений воды в открытом лотке (канал без верхней стенки). Измерения производились пневмометрическими трубками, причем наблюдатель вращался вместе с кару-

селью, на которой был укреплен канал с циркулирующей в нем водой. Удалось провести измерения лишь при весьма малых вращениях и малых скоростях протекания. Эпюры скорости в канале в какой-то мере напоминали теоретическое распределение, но в целом выводы Фетте, как показали дальнейшие исследования, оказались мало существенными.

В 1937 г. Э. Фрич при участии В. Шпаннаке [72] на уникальной по своим возможностям установке произвел измерения усилий во вращающихся звездах (т. е. тоже каналах типа лотков, открытых сверху) при протекании в них воды и сфотографировал вихри относительного движения в разных режимах вращения и протекания (киноаппарат вращался вместе со звездой). Было установлено, что вторичные вихри воздействуют на лопасти центробежного нагнетателя, но количественные характеристики не были получены.

Примерно в это же время Е. Грюнагель [73] поставил аналогичный эксперимент, проведя исследования лопастных колес турбин и насосов путем анализа фотографий относительного потока в разных режимах движения. Ему удалось наблюдать вторичные вихри при пуске колеса (пусковые вихри), которые довольно быстро затухали, и вихри, прилегающие к кромке нагнетания или к кромке засасывания лопасти в зависимости от режима течения. Однако измерения потерь давления проведены не были.

Общим недостатком перечисленных исследований было отсутствие в изучаемом канале четвертого ограничения канала, или, иначе говоря, верхней стенки канала при наличии нижней стенки и двух боковых. Свободная поверхность жидкости приобретает при вращении форму параболоида, так что для изучения равномерных потоков приходилось ограничиваться умеренными значениями угловой скорости. Кроме того, не соблюдалось подобие действующих сил модели и природы, так как не учитывалось трение на верхней стенке и сопряженный с ним градиент давления.

Некоторые количественные результаты. Первые количественные результаты, которым вначале не придали должного значения, были получены В. Зеелигом [84] еще в 1930 г. На простой установке с вращающейся S-образной трубкой (канал, ограниченный со всех сторон) Зеелиг определил возрастание коэффициента сопротивления такого канала по сравнению с неподвижным каналом и представил результаты как функцию отношения окружной (переносной) скорости к скорости течения в канале (рис. 8-10). Увеличение сопротивления почти на два порядка при больших u/w представлялось в те годы трудно объяснимым, и результаты измерений не были внедрены в гидравлические расчеты.

Более детальное и методически обоснованное экспериментальное исследование проблемы провел в 1959 г. Э. Добнер [68].

Установка Добнера (рис. 8-11) позволяла измерять сопротивление участка канала, перпендикулярного оси вращения, измерять скоростные профили в различных сечениях канала и обеспечивать стробоскопическое наблюдение за относительным потоком. Сечение канала было выбрано квадратным, верхняя стенка выполнялась прозрачной.

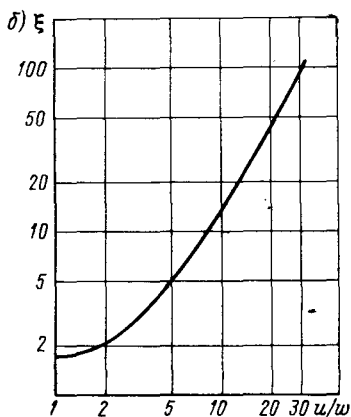
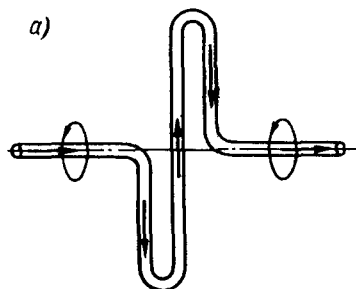


Рис. 8-10. Схема опытной установки (a) и зависимость коэффициента сопротивления от отношения переносной скорости к относительной (б)

Особая ценность исследования заключалась в том, что строго соблюдались принципы гидромеханического подобия. Центробежные силы в относительном движении направлены

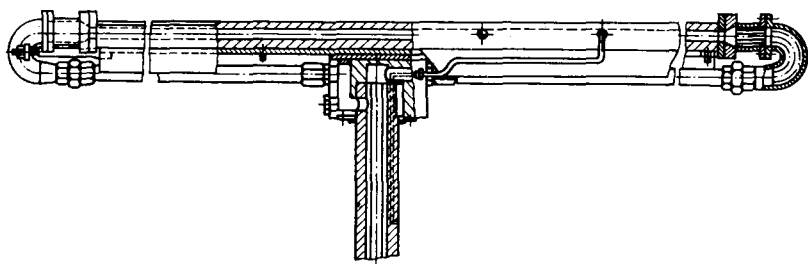


Рис. 8-11. Экспериментальная установка с вращающимся прямоугольным каналом

практически вдоль линий тока и не искажают их форму. Поэтому достаточно учитывать лишь силы Кориолиса. В этих условиях гидродинамические поля подобны, если при подобных геометрических условиях и равных числах Рейнольдса силы Кориолиса находятся в одинаковом отношении к другим действующим силам, т. е. в данном случае к силам инерции.

Следовательно, поля относительного потока подобны, если не изменяется отношение

$$R_0 = \frac{\rho \omega \omega}{\rho \omega / d} = \frac{\omega d}{\omega}, \quad (8-19)$$

где в числителе и знаменателе взяты силы на единицу объема жидкости, причем d — характерный линейный размер канала.

Безразмерный критерий R_0 называется коэффициентом вращения. Коэффициент вращения может быть представлен несколько иначе: $R_0 = \frac{\omega d}{\omega} = \frac{u}{\omega} \frac{d}{r}$, где r — радиус рассматриваемого сечения канала и u — окружная скорость.

Измерения были проведены в диапазоне чисел Рейнольдса от $Re=30$ до $Re=40\,000$ и в диапазоне коэффициентов вращения от $R_0=0$ до $R_0=4,0$. Результаты измерений обрабатывались в форме зависимости относительного коэффициента трения от безразмерного параметра K :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = f(K); \quad K = Re R_0^{0.5} = Re \sqrt{\frac{\omega d}{\omega}}, \quad (8-20)$$

где λ_0 — коэффициент трения неподвижного канала, λ — коэффициент трения вращающегося канала. График функции $\bar{\lambda} = f(K)$ представлен на рис. 8-12 (логарифмическая шкала). Как можно видеть, точки для различных коэффициентов вращения вплоть до определенных значений параметра K располагаются вдоль одной кривой. При этом существенно, что коэффициент λ_0 определяется по формуле Пуазейля $\lambda_0 = \frac{64}{Re}$, т. е.

для ламинарного режима. Места на графике, в которых измеренные величины отклоняются от общей кривой, соответствуют переходу от ламинарного режима к турбулентному. Это означает, что вторичные вихри стабилизируют поток в канале и критические значения чисел Рейнольдса возрастают до $Re_{кр} = 20\,000$ и более, после чего коэффициенты сопротивления перестают зависеть от коэффициента вращения и могут быть определены по формуле Блазиуса $\lambda_0 = 0,316 Re^{-0.25}$, причем поправка точно не установлена (диапазон λ примерно от 1,0 до 1,2). Зависимость критических чисел Рейнольдса от коэффициента вращения показана на рис. 8-13.

Добнер следующим образом объясняет увеличение коэффициента сопротивления канала и повышение критических чисел Рейнольдса при вращении.

Вторичный поток переносит части жидкости с высокой скоростью движения из середины канала к стенкам, где они тормозятся и в значительной мере теряют свою кинетическую энергию. В свою очередь, жидкость с малой скоростью протекания перемещается в середину канала и здесь ускоряется за счет

статического давления. Вследствие этого градиент скорости на одной стороне канала (сбегающей, или стороне всасывания) несколько уменьшается, но на противоположной стороне (на-

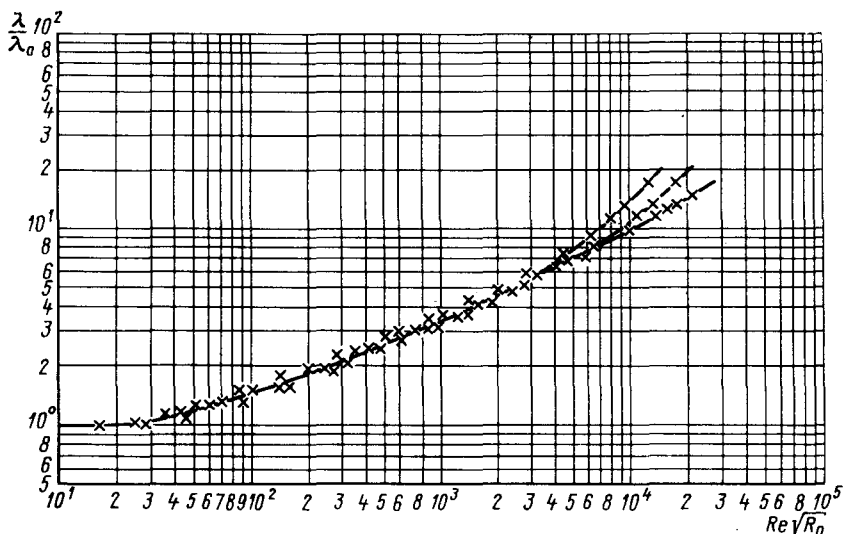


Рис. 8-12. Зависимость относительного коэффициента трения от числа Рейнольдса и коэффициента вращения

бегающей, или стороне нагнетания) и на двух других стенках канала (верхней и нижней) он многократно увеличивается (происходит как бы сужение канала), в результате чего возникает итоговое увеличение гидродинамического сопротивления.

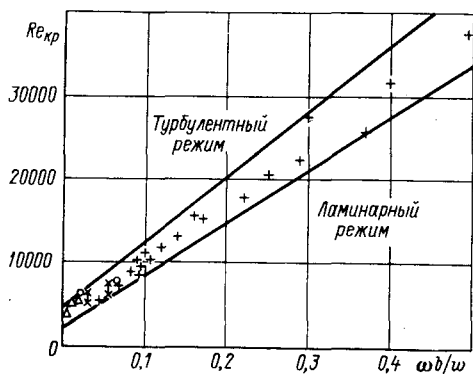


Рис. 8-13. Зависимость критических чисел Рейнольдса от коэффициента вращения

Нельзя забывать, что вторичный поток подвержен также трению, на которое затрачивается дополнительная энергия (так называемое вязкостное рассеяние).

Стабилизирующее действие сил Кориолиса связано с формой итогового потока в канале. Будучи направленными противоположно направлению окружной скорости, силы

Кориолиса смещают поток в направлении набегающей стороны канала, или стороны нагнетания. Этот факт, надежно установленный в экспериментах, прямо противоположен выводам вих-

ревой теории идеальной жидкости. Типичная эпюра скорости по данным измерений показана на рис. 8-14.

Известно [41], что в случаях, когда скоростной профиль увеличивается в направлении действия сил, турбулентность ослабляется. Поскольку в рассматриваемом случае силы Кориолиса направлены в сторону возрастания скорости относительного движения, поток испытывает стабилизирующее действие.

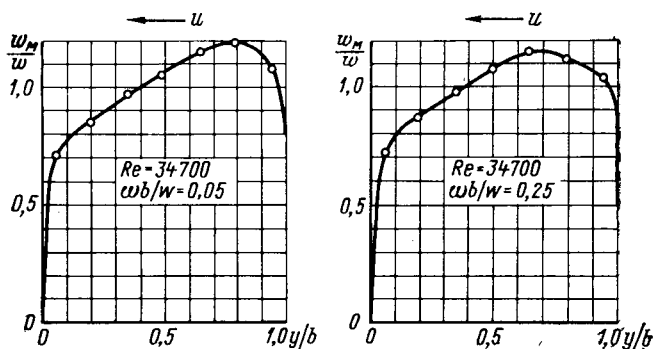


Рис. 8-14. Распределение осевой составляющей скорости во вращающемся канале

В заключение заметим, что результаты исследования Добнера хорошо аппроксимируются зависимостью

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{K}{60} \right)^{0,437} \quad (8-21)$$

в диапазоне параметра K от 10^2 до $3 \cdot 10^3$, который в основном соответствует задачам проектирования электрических машин.

Новейшие экспериментальные данные. В 1970 г. Ито и Нанбу [31] на экспериментальной установке, подобной добнеровской, но с круглым испытуемым каналом, провели исследование, имеющее целью расширить диапазон изученных движений и теоретически обосновать экспериментальные данные.

Результаты исследования для зоны ламинарного движения были обработаны в форме

$$\bar{\lambda} = 0,0883 k_{\pi}^{0,25} (1 + 11,1 k_{\pi}^{0,325}) \quad (8-22)$$

в диапазоне значений $2,2 \cdot 10^2 < k_{\pi} < 10^7$ и $Re_{\omega} / Re < 0,5$, причем $k_{\pi} = Re_{\omega} Re$, а $Re_{\omega} = \frac{\omega d^2}{\nu}$.

В турбулентном режиме

$$\bar{\lambda} = 0,942 + 0,058 k_T^{0,282} \quad (8-23)$$

в диапазоне значений $1 < k_T < 6 \cdot 10^2$, причем $k_T = \frac{Re_\omega^2}{Re} = R_0^2 Re$.

При этом $Re_{кр} = 1,07 Re_\omega^{0,23} \cdot 10^3$ в диапазоне $28 < Re_\omega < < 2 \cdot 10^3$.

Анализ приведенных данных показывает, что в диапазоне исследованных Добнером значений параметра K расчет по формуле (8-22) дает результаты, близкие к добнеровским.

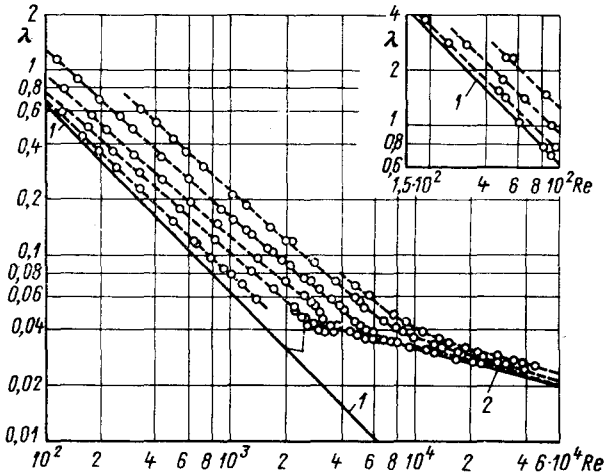


Рис. 8-15. Зависимость коэффициента трения вращающихся круглых каналов от числа Рейнольдса
1 — закон Пуазейля; 2 — закон Блазиуса

Более подробно исследованной оказалась турбулентная зона, причем, как можно видеть из полученных результатов (рис. 8-15), в этой зоне с увеличением чисел Рейнольдса сопротивления вращающегося и неподвижного каналов сближаются, что прямо противоположно ситуации, характерной для ламинарной зоны. Формула (8-23) достаточно надежно характеризует увеличение сопротивления канала при малых вращениях. Для высоких значений $Re_\omega \gg 1$ и $Re_\omega \gg Re$ Ито и Нанбу предлагают ориентировочную формулу:

$$\bar{\lambda} = \frac{0,0672 Re_\omega^{0,5}}{1 - 2,11 Re_\omega^{-0,5}} \quad (8-24)$$

В целом исследование подтверждает все основные выводы Добнера. Главное значение исследования заключается в том,

что особенности центробежного течения проанализированы для канала круглого сечения.

Что касается теоретического обоснования полученных результатов, то в связи с круглой формой исследованного канала оно не может быть распространено на наиболее важный для электрических машин случай канала прямоугольного сечения. К тому же теория дана лишь для развитого ламинарного режима движения ($Re \gg Re_{\omega}$; $k_{л} \gg 1$) и по необходимости содержит весьма радикальные допущения.

Некоторые выводы из анализа. Как можно видеть, исследователям движения среды во вращающемся радиальном канале удалось надежно установить следующие факты.

1. В начальный период вращения во входной зоне канала возникает пусковой вихрь, который вскоре угасает под влиянием вязкостного трения. Направление пускового вихря и результат его воздействия на поле скоростей в канале вполне согласуются с выводами вихревой теории идеальной жидкости [79].

2. В некоторых режимах вращения скоростные профили в каналах довольно близки к профилям при наличии пускового вихря, т. е. при незначительном вращении и малой вязкости среды характер движения близок к характеру движения идеальной жидкости.

3. При увеличении вращения, в особенности в зоне небольших скоростей протекания, начинают проявляться силы Кориолиса, которые смещают ядро потока в канале в направлении его набегающей стенки, т. е. противоположно вращению (инерция в переносном движении).

4. Вторичные потоки в каналах в зависимости от режима движения могут весьма существенно увеличивать коэффициент трения по сравнению с покоящимся каналом. Это возрастание тем больше, чем больше отношение окружной скорости к скорости протекания, но зависит в то же время от чисел Рейнольдса. При весьма больших числах Рейнольдса возрастание коэффициента λ можно считать незначительным.

Обращает на себя внимание следующее характерное обстоятельство. Концепция идеальной жидкости приводит к выводу о наличии вихря в относительном движении, связанного с консервативностью абсолютного движения, причем конкретным механизмом образования вихря служат силы Кориолиса [см. уравнение (8-11) и его вывод]. Проявления вязкости нивелируют вихрь относительного движения, и он может рассматриваться для реальной жидкости лишь в качестве пускового.

Однако в вязкой жидкости эпюра скорости в сечении канала крайне неравномерна в особенности в ламинарных режимах движения. Это приводит к тому, что силы Кориолиса, пропорциональные относительной скорости, в разной мере воздействуют на ядро потока и на его периферию, создавая градиент

давления и градиент скорости, перпендикулярные линиям тока, что приводит к образованию вихрей.

Таким образом, вторичное течение, как в рамках теории идеальной жидкости, так и с позиций рассмотрения вязкостных сил оказывается обязанным своим возникновением воздействию сил Кориолиса и потому количественно определяется этими силами наряду с другими факторами, характеризующими движение.

Последний вывод позволяет полагать, что необходимые количественные соотношения могут быть получены на основе теории идеальной жидкости при дополнительном учете особенностей, вносимых проявлениями вязкостных сил.

8-8. Общее векторное дифференциальное уравнение вторичного вихря

Большой интерес представляет теоретическое исследование идеальной жидкости во вращающихся каналах при наличии градиента давления пограничного слоя, выполненное в 1953 г. Д. Крамером и Д. Станицем [78]. Это исследование, более общее по сравнению с вихревой теорией, изложенной выше, позволяет по-новому оценивать влияние вторичных течений в тех случаях, когда они возникают. Авторы исследования дают лишь ориентировочные количественные характеристики вторичных потоков, но их выводы могут быть полезны при изучении относительного движения во вращающихся каналах произвольной формы.

Обратимся к уравнению установившегося движения идеальной жидкости, объединяя действие силы тяжести с действием давления:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Так как в двойном векторном произведении

$$\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w}) = \nabla (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \nabla),$$

$$\nabla (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = 0 \text{ и } \nabla \times \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w}, \text{ то}$$

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{w} \text{ и } \mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

С учетом сил Кориолиса в относительном движении получим:

$$\mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{w} = \nabla H + \frac{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}}{\omega}, \quad (8-25)$$

где H — постоянная Бернулли для относительного движения,

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

После деления уравнения (8-25) на $(\omega R)^2$ оно запишется в относительных единицах. Умножим обе части уравнения векторно на ω . Получим:

$$\begin{aligned} \omega \times (\omega \times \text{rot } \omega) &= \omega \times \nabla H + \frac{2\omega \times (\omega \times \omega)}{\omega} = \\ &= \omega \times \nabla H + 2\omega^2 \frac{\omega}{\omega} - 2 \frac{\omega \cdot \omega}{\omega} \omega. \end{aligned} \quad (8-26)$$

Из уравнения неразрывности $\Delta \cdot \omega = 0$ следует, что выражение $\nabla \cdot \frac{\Omega}{\omega} \omega = \omega \cdot \nabla \frac{\Omega}{\omega}$. Кроме того, из (8-26)

$$\nabla \cdot \frac{\omega \times (\omega \times \text{rot } \omega)}{\omega \cdot \omega} = \nabla \cdot \frac{\omega \times \nabla H}{\omega^2} + \omega \cdot \nabla \frac{-2\omega \cdot \omega}{\omega \omega^2}.$$

Если теперь два последних уравнения подставить в разложение векторного произведения $(\omega \times \text{rot } \omega) \times \omega$, дающее

$$\nabla \cdot \frac{\Omega}{\omega} \omega = \nabla \cdot \frac{\omega \times (\omega \times \text{rot } \omega)}{\omega \cdot \omega},$$

где $\Omega = \frac{\text{rot } \omega}{\omega} \omega$ есть составляющая вторичного вихря вдоль линии тока (в относительных единицах, т. е. деленная на ω), то получим:

$$\omega \cdot \nabla \frac{\Omega}{\omega} = \nabla \cdot \frac{\omega \cdot \nabla H}{\omega^2} + \omega \cdot \nabla \frac{-2\omega \cdot \omega}{\omega \omega^2},$$

или после преобразований

$$\omega \cdot \nabla \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2}{\omega^2} \nabla H \cdot \frac{\omega}{\omega} + \frac{2k_g |\nabla H|}{\omega} + \omega \cdot \nabla \frac{-2\omega \cdot \omega}{\omega \omega^2}, \quad (8-27)$$

где k_g — геодезическая кривизна канала.

Уравнение (8-27) является векторным дифференциальным уравнением составляющей вторичного вихря вдоль трубки тока. Оно выражает зависимость интенсивности вторичного вихря от угловой скорости, от относительной скорости, от кривизны трубки и от величины постоянной Бернулли H .

Первый член дифференциального уравнения дает составляющую, параллельную оси вращения. Второй член определяет составляющую, перпендикулярную главной нормали линии течения. Обе составляющие не совпадают по направлению лишь в том случае, когда перпендикуляр к поверхности Бернулли не лежит в соприкасающейся плоскости линии тока (рис. 8-16). К радиальным каналам этот случай не относится, так что для каналов электрических машин обе составляющие совпадают по направлению, причем вторая из них не равна нулю лишь в каналах, имеющих кривизну. Что касается третьего члена в правой части уравнения (8-27), то, как очевидно, эта составляющая вторичного вихря, не зависящая от изменения величины

давления H , не равна нулю лишь в том случае, когда вектор относительной скорости неперпендикулярен вектору угловой скорости.

Таким образом, оказывается, что при радиальной ориентации каналов (в плоскостях, перпендикулярных оси вращения), в том числе каналов, имеющих кривизну, единственной составляющей градиента давления, которая воздействует на величину вторичного вихревого движения, является составляющая, параллельная оси вращения. Это означает, что пограничный слой на набегающей и сбегаящей сторонах канала не влияет на вторичный вихрь, по крайней мере в идеальной жидкости.

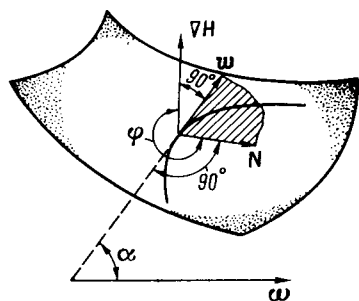


Рис. 8-16. Соприкасающаяся плоскость линии тока и направления векторов скорости и градиента давления

Существен лишь пограничный слой на нижней и верхней стенках.

Этот несколько неожиданный вывод лишний раз подчеркивает несостоятельность экспериментального изучения вторичных потоков в открытых лотках (каналах без верхней стенки*).

Как следует из сказанного, применительно к прямым радиальным каналам общее дифференциальное уравнение вторичного течения упрощается до вида:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2}{\omega^2} \nabla H \cdot \frac{\omega}{\omega}. \quad (8-28)$$

При переходе к координатной форме записи в простейшем случае прямого радиального канала получим:

$$d \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) = \frac{2}{\omega^2} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{xdx}{\omega}.$$

Интеграл этого уравнения для канала неизменного сечения с параллельными стенками имеет вид:

$$\frac{\Omega}{\left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)_i} = \frac{2}{\omega^2} (r - r_i), \quad (8-29)$$

где индекс i обозначает сечение входа в канал.

Для прямых каналов с боковыми стенками, направленными по радиусам, получим

$$\frac{\Omega}{\left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)_i} = \frac{r^3}{2\omega_R^2}. \quad (8-30)$$

* Представляется парадоксальным, что крупнейшие представители немецкой школы гидродинамики [71, 73], которая была в числе первых создателей теории моделей (подобия), пренебрегли основными принципами этой теории при постановке дорогостоящих и трудоемких экспериментов.

Из приведенных решений видно, что вторичные вихри в идеальной жидкости на единицу градиента давления на входе в канал пропорциональны угловой скорости [уравнение (8-30) записано в относительных величинах], некоторой степени радиуса и обратно пропорциональны квадрату относительной скорости. Эти выводы ближе всего к экспериментальным результатам Зеелига [84]. На рис. 8-17 показано изменение $\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)_i$ в зависимости от ω для $r_i = 0,4$ по (8-29). Разные кривые относятся к различным углам между радиальным направлением и направлением потока на входе в канал.

8-9. Физические причины увеличения сопротивления

Необходимость отчетливой физической трактовки повышенного трения во вращающихся каналах вызвана некоторой противоречивостью данных, которые содержатся в распространенной технической литературе. Большинство книг, посвященных проблемам гидравлики турбин [56] и насосов [42], издано до того, как стали известны результаты новых исследований. По этой причине существование осевого вихря связывается обычно лишь с принципом консервативности абсолютного движения.

С другой стороны, попытки детального рассмотрения механизма диссипации энергии из-за влияния вторичных вихрей [31] пока еще не дали плодотворных результатов в связи с очевидной сложностью явления, в особенности в связи с его разнохарактерностью в различных режимах движения.

В то же время нужды проектирования машин настоятельно требуют, чтобы увеличение аэродинамических и гидродинамических сопротивлений надежно учитывалось расчетными формулами.

В создавшейся ситуации, по-видимому, единственной возможностью является анализ составляющих гидродинамического сопротивления и сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными.

В большой мере указанный анализ проделан выше при описании выполненных экспериментальных исследований. Дополним его некоторыми более конкретными соображениями.

Рассмотрим вначале механизм деформации эпюры скоростей развитого ламинарного движения (параболоид вращения) в неподвижном канале в эпору скоростей во вращающемся

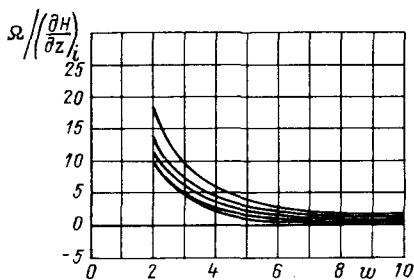


Рис. 8-17. Зависимость вторичного течения от величины относительной скорости

канале. Придадим последней несколько упрощенный вид (рис. 8-18), довольно близко, впрочем, повторяющий форму экспериментальной [68] кривой (рис. 8-19).

Как можно видеть, деформация эпюры скоростей в данном случае не изменяет отношение максимальной скорости к средней, которое характеризует меру затраченной при движении кинетической энергии. В то же время характер пограничного слоя изменяется существенно. Можно констатировать, что при устойчиво ламинарном движении в наличии типично турбулентный пограничный слой на набегающей стенке и на верхней и нижней стенках (по крайней мере в зоне нагнетания).

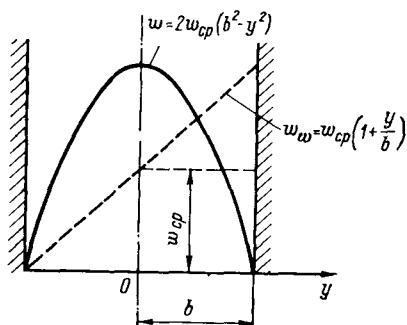


Рис. 8-18. Схематическое представление эпюры осевой скорости в канале

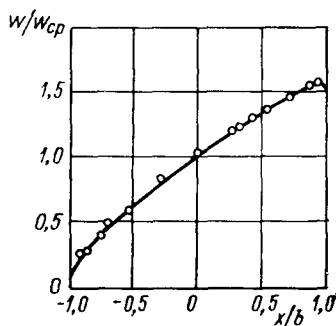


Рис. 8-19. Экспериментальное распределение осевой скорости

Как известно, потери трения в ламинарном и турбулентном пограничных слоях резко различаются в связи с существенно разной величиной градиента скорости в самом пограничном слое. Отношение касательных напряжений пропорционально числу Рейнольдса в степени 0,3:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{\Gamma}}{\tau_{\Gamma}} = A \text{Re}_x^{0,3}, \quad (8-31)$$

где за определяющий размер может быть взята толщина пограничного слоя при турбулентном течении. Величина коэффициента A в (8-31) зависит от степени развитости ламинарного движения и составляет в среднем 0,1. Можно заметить, что величина (8-31) близка к экспериментальному значению (8-21).

Допустим теперь, что вторичный вихрь, в особенности при малых скоростях протекания и значительных вращениях, близок по интенсивности к вихрю идеального движения. Такое допущение подсказано экспериментальными данными. Наличие пусковых вихрей по всей длине канала в начальный период вращения и вихрей того же направления в режимах малой по-

скоростей захватывает весь канал. По этой причине соответствие полученного значения и формулы (8-23) следует считать удовлетворительным.

8-10. Формулы сопротивления для вентиляционного и гидравлического расчетов электрических машин

Исходя из изложенного выше, коэффициенты сопротивления должны рассчитываться отдельно для ламинарного и турбулентного режимов движения, причем критическое число Рейнольдса зависит от коэффициента вращения и равно $R_0 \cdot 10^5$ (с некоторым запасом по итоговому сопротивлению).

В ламинарном режиме

$$\bar{\lambda}_л = \frac{\lambda}{\lambda_0} = 10^2 \frac{R_0}{Re} + 0,1 R_0^{0,2} Re^{0,5}, \quad (8-32)$$

где $\lambda_0 = 64/Re$.

В турбулентном режиме

$$\bar{\lambda}_т = \frac{\lambda}{\lambda_0} = R_0^{0,1} Re^{0,05}, \quad (8-33)$$

где $\lambda_0 = 0,316 Re^{-0,25}$

Числа Рейнольдса определяются по расходной составляющей скорости в канале $w_{ср}$, и за определяющий размер принимается гидравлический диаметр канала. Последнее относится и к вычислению коэффициентов вращения R_0 .

Впоследствии (гл. 15, 16) при рассмотрении систем охлаждения мощных турбогенераторов и гидрогенераторов мы увидим, как учет влияния вращения на аэродинамическое сопротивление систем вращающихся каналов позволяет выработать методы расчета некоторых сложных физических обстоятельств, характерных для электрических машин этих типов.

Глава девятая

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

9-1. Вводные замечания

Если охлаждение элементов конструкции электрической машины осуществляется жидкостью, например водой или маслом, то при проектировании машины производят так называемый гидравлический расчет. Гидравлический расчет по существу не отличается от вентиляционного, поскольку в последнем пренебрегают сжимаемостью газов.

Пренебрежение сжимаемостью не позволяет отличать газы от капельных жидкостей по крайней мере до тех пор, пока ис-

следует область так называемых избыточных давлений, превосходящих атмосферное. Лишь при наличии растяжений (отрицательных давлений) в струе капельных жидкостей возникает нарушение сплошности или неразрывности потока, называемое кавитацией.

Явление кавитации свойственно исключительно жидкостям, и его проявление может иметь важные последствия при работе машин, в том числе электрических машин. С этой точки зрения гидравлический расчет значительно отличается от вентиляционного.

Но и при расчетах некавитирующих конструкций гидравлические сопротивления во многом несходны с аэродинамическими, в первую очередь соразмерностью компонент суммарного сопротивления.

Типичной особенностью гидравлической цепи является преобладание потерь трения над потерями других типов (вход, повороты, выход). Большая относительная длина каналов гидравлического тракта (отношение длины к гидравлическому диаметру находится в диапазоне значений 200—5000) приводит к тому, что коэффициенты местного сопротивления трения $\lambda \frac{L}{d}$ даже для сравнительно гладких каналов достигают значений порядка 100.

Если учесть дополнительно, что плотность жидкостей примерно на два порядка превосходит плотность газов, то станут понятными некоторые количественные характеристики гидравлических цепей, такие, как сравнительно небольшая скорость движения среды (0,5—5,0 м/сек вместо 5,0—50 м/сек в каналах аэродинамических трактов) и значительные потери напора (0,1—10,0 кгс/см² вместо 0,1·10⁻²—0,1 кгс/см²).

Перечисленные обстоятельства побуждают выделять гидравлический расчет как самостоятельный раздел проекта электрической машины.

9-2. Гидравлический расчет обмоток статора с жидкостным охлаждением

Целью гидравлического расчета является определение параметров схемы для выбора таких нагнетателей (насосов), которые обеспечивали бы циркуляцию необходимого расхода охлаждающей жидкости. Выбор производится по каталогам.

Расчет сопротивления канала в обмотке или группы последовательно соединенных каналов выполняют по формуле:

$$z = \frac{\gamma}{2g} \left(\lambda \frac{L}{d} + \xi \right) \frac{n}{s^2}, \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^8, \quad (9-1)$$

где n — число последовательно соединенных каналов, длиной L каждый; ξ — суммарный коэффициент местных сопротивлений поворотов и расширений на длине L одного канала.

Поскольку основной составной частью суммарного гидравлического сопротивления является трение, при выполнении гидравлического расчета главное внимание уделяют величине коэффициента трения.

Коэффициент трения λ зависит от степени турбулизации потока и относительной шероховатости стенок канала (§ 5-12). Значения коэффициента трения могут быть определены из графиков на рис. 5-24 либо для вполне гладких каналов по формулам Пуазейля (5-20) и Блазиуса (5-22).

Опыт изготовления и исследования обмоток с водяным охлаждением показывает, что хотя стенки цельнотянутых медных каналов являются практически гладкими ($\Delta \leq 0,005$ мм), в расчете следует принимать значение абсолютной шероховатости $\Delta \approx 0,06$ мм. Такая корректировка позволяет учитывать изменения живых сечений каналов по их длине, определяемые технологией изготовления проводников с внутренними каналами [64].

Некоторые значения абсолютной шероховатости каналов других типов приведены выше (§ 5-12).

Пример расчета. Определить гидравлическое сопротивление и перепад давления в обмотке с водяным охлаждением статора турбогенератора мощностью 30 Мвт. Число последовательно соединенных каналов $n=2$; длина канала $L=4,96$; сечение канала $s=8,8 \cdot 10^{-6}$ м². На один канал приходится один поворот на 90°. Рабочая скорость движения струи $w=1,0$ м/сек.

Расчет. Гидравлический диаметр

$$d = \frac{4 \cdot 8,8 \cdot 10^{-6}}{2(2 + 4,4) \cdot 10^{-3}} = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Число Рейнольдса при температуре воды 50°С

$$Re = \frac{1 \cdot 2,75 \cdot 10^{-3}}{0,556 \cdot 10^{-6}} = 5000.$$

Абсолютная шероховатость стенок

$$\Delta = 0,06 \text{ мм} = 0,06 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Относительная шероховатость

$$\bar{\Delta} = \frac{0,06 \cdot 10^{-3}}{2,75 \cdot 10^{-3}} = 0,022.$$

Коэффициент трения (рис. 5-24)

$$\lambda = 0,054.$$

Коэффициент местных сопротивлений

$$\xi = 1,1 + 1,0 = 2,1.$$

Гидравлическое сопротивление

$$z = \frac{1000}{2 \cdot 9,8} \left(0,054 \frac{4,96}{2,75 \cdot 10^{-3}} + 2,1 \right) \frac{2}{(8,8 \cdot 10^{-6})^2} = 0,13 \cdot 10^9 \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^8.$$

Расход воды через канал

$$Q = ws = 1 \cdot 8,8 \cdot 10^{-6} = 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{сек.}$$

Потери давления

$$\Delta H = 0,13 \cdot 10^9 (8,8 \cdot 10^{-6})^2 = 10,1 \cdot 10^3 \text{ мм вод. ст.} = 10,1 \text{ м вод.ст.}$$

Измеренное значение потерь напора 10 м вод. ст. (1 атм).

9-3. Нарушение сплошности течения (кавитация)

При определении понятия капельной жидкости (§ 4-1) было подчеркнуто, что все внешние силы, действующие на элемент объема жидкости, направлены снаружи внутрь. Этот постулат формулируется в качестве опытного закона по той причине, что хотя с точки зрения молекулярной теории прочность воды, например, равна 1600 атм [34], практически вода разрывается, как только давление внутри струи оказывается меньше, чем давление насыщения при данной температуре.

Строго говоря, если считать причиной разрыва струи наличие в ней пузырьков газа или пара (пузырьковая форма кавитации), которые захлопываются (термин, принятый в литературе о кавитации) при определенных значениях параметров режима, то условие неразрывного течения запишется в виде [51]:

$$p > p_s + \left(p_0 - p_s + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{2\sigma}{R}, \quad (9-2)$$

где p — внешнее давление в данном сечении; p_s — давление насыщенных паров воды; p_0 — внешнее давление в предшествующем сечении; σ — поверхностное натяжение; R_0 — радиус пузырька в предшествующем сечении; R — радиус пузырька в данном сечении.

Из уравнения (9-2) критическая величина внешнего давления

$$p_{кр} = p_s - \frac{4}{3} \frac{\sigma}{R_{кр}}, \quad (9-3)$$

однако, при пренебрежении величиной поверхностного натяжения (для воды $\sigma = 7,4 \cdot 10^{-5}$ кгс/см) можно принять критическое давление равным давлению насыщения.

В выражении (9-2) учтено лишь давление газа, продиффундировавшего внутрь пузырька из окружающей воды до рассматриваемого сечения. При этом считается, что в процессе кавитации диффузия газа, как медленный процесс, несущественна. В то же время известно, что конвективная диффузия протекает на три порядка быстрее, чем молекулярная и, следовательно, не может быть исключена из рассмотрения для случая течения в каналах.

К сказанному необходимо добавить, что содержание в охлаждающем дистилляте (конденсате) воздуха и других газов может быть различным, в том числе значительным. Все это говорит о том, что неучет газовой диффузионной кавитации может в отдельных случаях привести к ошибке в оценке критических параметров.

Договоримся всякий разрыв струи, или нарушение сплошности движения жидкости, называть кавитацией. Поскольку давление насыщения паров воды при типичных для эксплуатации электрических машин температурах достаточно близко к атмосферному, отрицательные давления (растяжения), которым способна противостоять применяемая в технике вода, весьма невелики.

Для расчета давления насыщения водяного пара в диапазоне температур $0 < \theta < 100^\circ \text{C}$ может быть предложена простая формула

$$p_s = 0,01 \left(\frac{1}{0,01} \right)^{0,01\theta}, \text{ атм.} \quad (9-4)$$

Более точно давление насыщения определяют по таблицам физических свойств воды на линии насыщения (приложение 1).

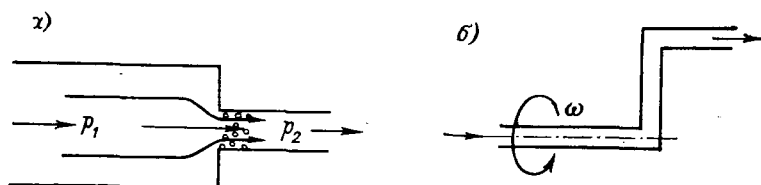


Рис. 9-1. Возникновение растягивающих усилий в струе

Причины, вызывающие появление растягивающих напряжений, могут быть различными. Наиболее характерны из них следующие.

1. При внезапном сужении струи в связи с увеличением динамического давления статическое давление в зоне сужения снижается настолько, что абсолютное давление становится в данном сечении меньше давления насыщения (рис. 9-1, а).

2. При сливе охлаждающей в ды на большем радиусе, чем радиус подачи (рис. 9-1, б), потери напора на участке подвода воды оказываются больше, чем разница между атмосферным давлением и давлением насыщения, т. е. давление струи в данной вытяжной схеме оказывается в каком-либо сечении меньше давления насыщения [44].

Первая из названных причин свойственна и неподвижным, и вращающимся каналам. Понижение статического давления при внезапном сужении *

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{\rho}{2} \omega_1^2 \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\rho}{2} \omega_1^2 \left[\left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 - 1 \right], \quad \text{кгс/м}^2, \quad (9-5)$$

где s_1 и ω_1 — сечение и скорость воды до сужения.

* Понижение давления в струе по закону Бернулли (обратимое) не следует смешивать с необратимыми потерями давления, которые в силу диссипации не могут быть восстановлены при восстановлении исходного сечения канала вдоль по течению.

Если принять, что анализируемое сужение находится вблизи слива и избыточное давление в струе близко к нулю, то условие бескавитационного движения через зону сужения запишется в виде: $\Delta p < 1 - p_s$ или

$$\Delta p < 1 - 0,01 \left(\frac{1}{0,01} \right)^{0,015}, \text{ атм.} \quad (9-4')$$

Если в зоне сужения имеется избыточное давление (подпор), его значение должно быть прибавлено к единице в формуле (9-4').

Так как с повышением температуры воды давление насыщения тоже повышается, то кавитация естественно наступает быстрее, или, точнее говоря, при меньшей скорости движения воды ω . Указанную скорость движения, при которой возникает

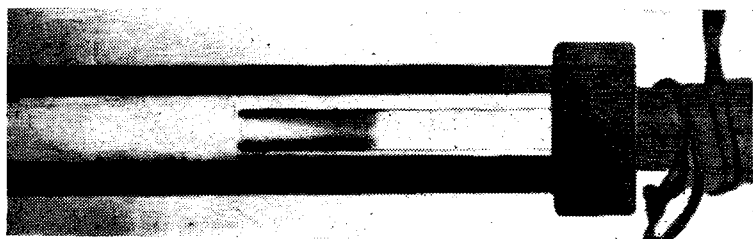


Рис. 9-2. Устойчивая кавитация в сужающемся канале

устойчивая кавитация, называют критической и относят либо к меньшему сечению (критическая скорость в узком сечении), либо к большему.

Для критической скорости в узком сечении имеем:

$$\omega_{2кр} \approx 10 \sqrt{\frac{1-p}{1-\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2}},$$

что дает для условий $\vartheta = 70-75^\circ \text{C}$; $s_2 : s_1 = 1 : 3$ величину скорости в узком сечении примерно $\omega_{2кр} = 12 \text{ м/сек}$. Эксперимент (рис. 9-2) хорошо подтверждает такой вывод [64].

Второе условие, приводящее к появлению растягивающих усилий, зависит не только от геометрии каналов и температуры воды, но и от распределения давления в поле центробежных сил. Его анализу посвящен материал следующего параграфа.

9-4. Распределение давления и температуры во вращающихся каналах обмоток роторов и условия возникновения кавитации

Распределение статического давления во вращающихся каналах неизменного сечения определяется особенностями принятой схемы циркуляции воды и конструкцией каналов.

В поле центробежных сил внешнее давление p в уравнении равновесия пузырька (9-2) есть некоторый итог взаимодействия атмосферного давления p_a , давления насоса $p_{\text{нагн}}$, потерь давления в гидравлическом тракте Δp и центробежного давления $p_{\text{центр}}$. Атмосферное давление для простоты может быть прибавлено к давлению насоса, чтобы избавиться от лишнего слагаемого.

Таким образом, приближенно можно считать, что при равновесии пузырька

$$p_{\text{кр}} \approx p_s = p_{\text{нагн}} + \Delta p + p_{\text{центр}}, \quad (9-6)$$

где справа написана алгебраическая сумма и знаки членов уравнения должны быть взяты в зависимости от особенностей схемы циркуляции.

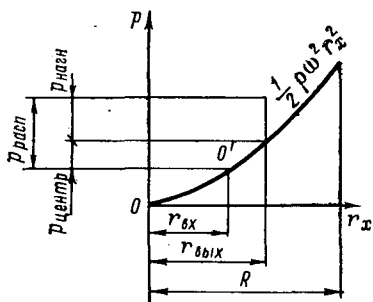


Рис. 9-3. Статическое давление во вращающемся канале

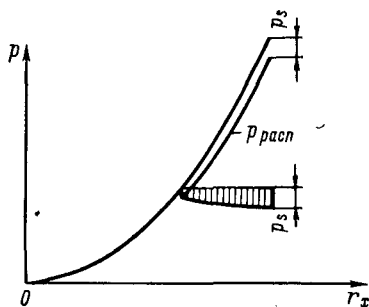


Рис. 9-4. Температурная поправка к кривой располагаемого давления

Центробежная составляющая давления для всех схем описывается параболой* (рис. 9-3)

$$p_{\text{центр}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_x^2, \quad (9-7)$$

где r_x — текущее значение радиуса, причем в случаях входа воды на радиусе $r_{\text{вх}}$ из величины (9-7) следует вычесть величину $p_{\text{центр. вх}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_{\text{вх}}^2$. Графически это означает, что начало координат для составляющей $p_{\text{центр}}$ берется в точке с координатами: $r_{\text{вх}}, \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_{\text{вх}}^2$. Давление насоса есть величина постоянная. Сумма давлений насоса (с учетом атмосферного давления) и центробежного давления составляет располагаемое давление в каждой схеме $p_{\text{расп}}$.

* Отметим, что фактически конструкции роторов не содержат радиально ориентированных каналов, а лишь радиальные участки, дополненные весьма длинными аксиальными участками, каждый из которых находится на определенном радиусе r_x из диапазона $O-R$. Таким образом, фактическая кривая статического давления есть парабола, составленная из отдельных отрезков.

При исследовании вращающихся каналов следует учитывать влияние внезапных изменений сечения.

В вытекающем из (9-6) выражении

$$p_{\text{расп. кр}} = p_s + \Delta p \quad (9-8)$$

под Δp следует понимать сумму обратимых потерь статического давления Δp_1 при сужении (за счет повышения скорости) и необратимых потерь Δp_2 от входа в тракт до рассматриваемого сечения (за счет диссипации энергии на местных гидравлических сопротивлениях).

Графически (рис. 9-4) парабола $p_{\text{расп}}$ должна быть скорректирована на каждом текущем радиусе канала в зависимости от температуры воды в данном месте тракта. Можно с достаточной точностью принять, что температура воды меняется по радиусу линейно, например, от 40 до 70°С. Тогда кривая (9-4) может быть нанесена от начала координат $(r_{\text{вх}}, \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_{\text{вх}}^2)$ для графического вычитания из кривой $\frac{1}{2} \rho \omega^2 r_x^2$. Итоговая кривая располагаемого давления теперь учитывает возможность возникновения кавитации до появления абсолютных растягивающих напряжений.

Рассмотрим построение кривой потерь давления в тракте. Потери давления в канале обмотки можно приближенно принимать пропорциональными длине канала (рис. 9-5). Следует только иметь в виду, что суммарные потери в тракте включают потери входа в водоподвод, потери в водопроводе и потери выхода из него, потери радиального участка подвода воды к обмотке, потери входа в обмотку и выхода из нее, потери радиального участка от обмотки к водоотводу и потери водоотвода. Еще раз подчеркнем, что при исследовании кавитации местные (обратимые) понижения давления при сужениях следует в каждом данном сечении прибавлять к суммарным гидравлическим потерям давления от начала тракта до данного сечения.

На рис. 9-5 местные сопротивления (потери давления) нанесены как вертикальные отрезки (с неизменной абсциссой), что соответствует изменению потерь на данном радиусе (потери в аксиальных участках канала, потери входа и выхода из него, потери местных сужений). Все отрезки кривой потерь, построенные вдоль радиуса, не являются горизонтальными, т. е. имеют переменную ординату, так как при любом изменении радиуса удлиняется путь движения воды от его начала (например, на участке от выхода из витка n на радиусе r_n до входа в виток $n+1$, на радиусе r_{n+1}).

Крайними случаями являются схемы без использования напорного действия ротора (рис. 9-6, а) и схемы без использования насоса (рис. 9-6, б и в). Промежуточные варианты используют лишь частичный напор каналов ротора (рис. 9-6, г и д).

Анализ условий возникновения кавитации в схеме на рис. 9-6, а может быть проведен без учета фактора вращения,

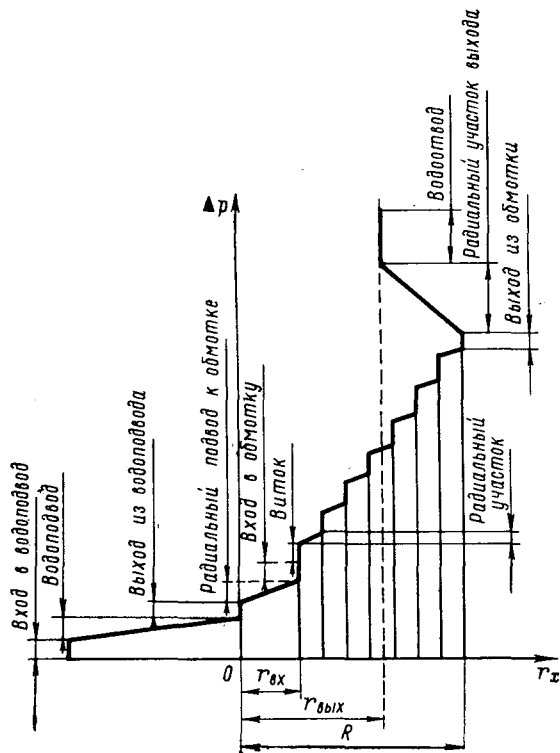


Рис. 9-5. Распределение потерь давления по длине канала

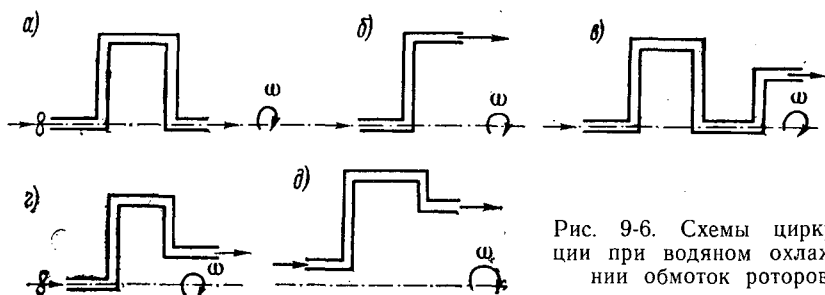


Рис. 9-6. Схемы циркуляции при водяном охлаждении обмоток роторов

поскольку все растягивающие напряжения центробежного участка компенсируются сжимающими напряжениями участка центростремительного. Поэтому в данном случае существенно лишь выполнять при сужениях требование $p_{нагн} > \Delta p + p_s$.

Схема на рис. 9-6, б наиболее интересна с точки зрения кавитационного анализа. Рассмотрим эпюру статических давлений воды в каналах тракта такой схемы (рис. 9-7). На рисунке водоподвод условно показан как продолжение радиального участка тракта. Как видно из рисунка, избыточное давление на входе (давление насоса), равное $+\Delta p$, должно быть в данном случае небольшим и компенсировать потери в водопроводе и на участке тракта до входа в каналы обмотки. При этом растягивающие напряжения не возникнут. Вариант этой схемы на рис. 9-6, д с частичным использованием напора ротора несколько сложнее, так как здесь для ликвидации растягивающих напряжений необходимо более строго выбирать сопротивление $\Delta p_{\text{вых}}$. В противном случае потери давления могут превзойти располагаемое давление (рис. 9-8, а и б).

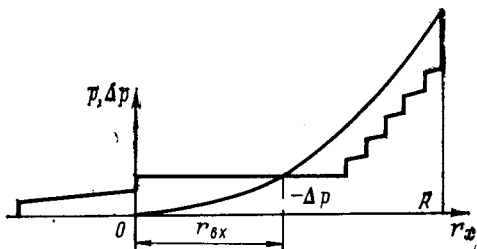


Рис. 9-7. Распределение давления в самонапорной схеме

Анализ схемы на рис. 9-6, в приведен лишь для иллюстрации принципиальных соображений (рис. 9-9), поскольку эта схема

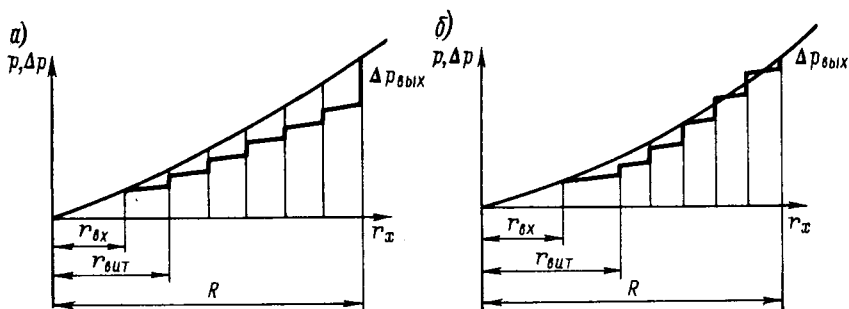


Рис. 9-8. Схема с использованием напора ротора: а — некавитирующая конструкция; б — кавитирующая конструкция

лишена практического смысла. В самом деле, наличие участка давления на выходе не может быть использовано, так как данный участок будет работать в режиме вытяжного насоса и на оси вращения возникнут растягивающие напряжения, почти равные развиваемому давлению.

Наибольшее распространение нашли схемы типа 9-6, г. Эпюры давлений для случаев работы с насосом и без него приведены на рис. 9-10, а и б. Как видно из графиков, работа по такой схеме принципиально требует весьма небольшого избыточного давле-

ния на входе (давления насоса). Однако полезный расход воды будет при этом также небольшим. Поэтому практически применяют насосы большого давления, что одновременно исключает возможность появления растягивающих напряжений.

Для иллюстрации изложенной методики кавитационного расчета роторов турбогенераторов здесь приведен расчет ротора машины мощностью 200 Мвт, выполненного по схеме на рис. 9-6, г, и ротора машины мощностью 60 Мвт, выполненного по схеме на рис. 9-6, б (рис. 9-11 и 9-12). Как видно из графиков, подогрев

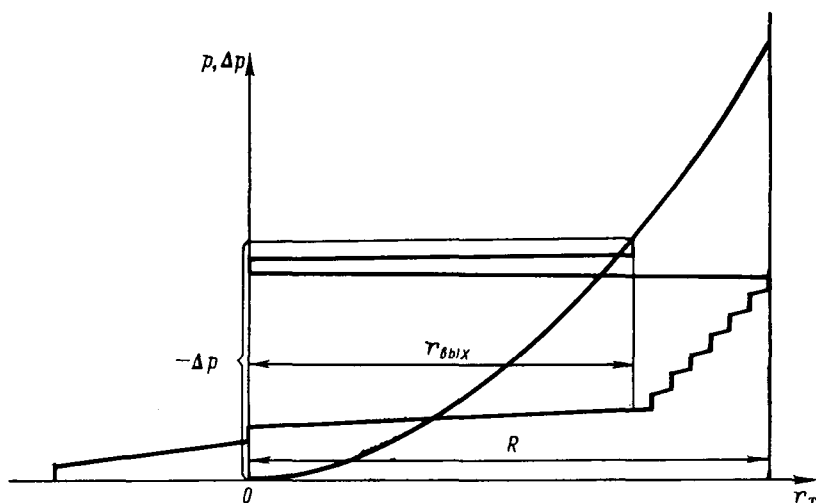


Рис. 9-9. Распределение давления в вытяжной схеме

воды и сужения каналов играют значительно меньшую роль, чем растягивающие напряжения, связанные с центробежным эффектом.

9-5. Некоторые последствия устойчивой кавитации в каналах обмоток электрических машин

Есть по крайней мере два обстоятельства, которые заставляют отнести устойчивую кавитацию в каналах обмоток к числу весьма нежелательных явлений. Первое из них, вполне очевидное, заключается в эрозии стенок каналов, сопровождающей кавитацию. Второе, менее изученное, связано с величиной так называемых динамических характеристик кавитации, или, проще говоря, с увеличением гидравлического сопротивления каналов в связи с возникновением кавитации.

Количественная оценка интенсивности кавитации может быть проделана по методу Тирувенгадама [86], который позволяет учесть особенности материала, подвергающегося эрозии.

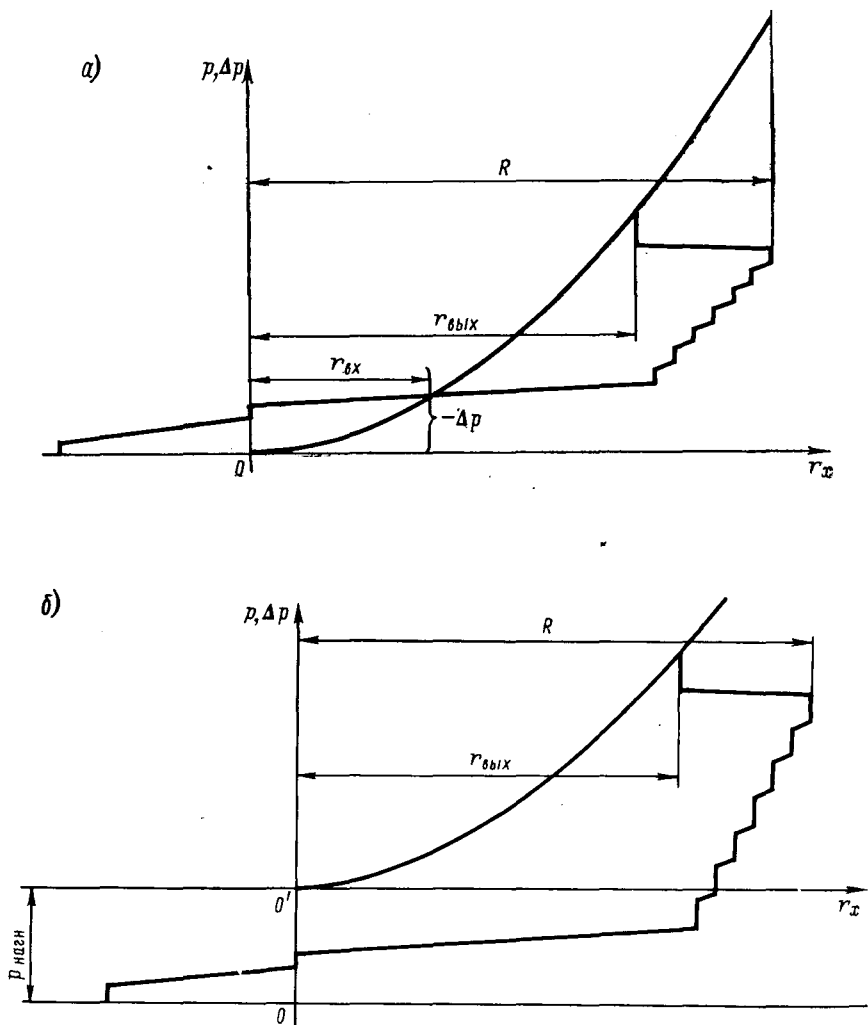


Рис. 9-10. Распределение давления в схеме с частичным использованием напора ротора при использовании насоса (б) и без него (а)

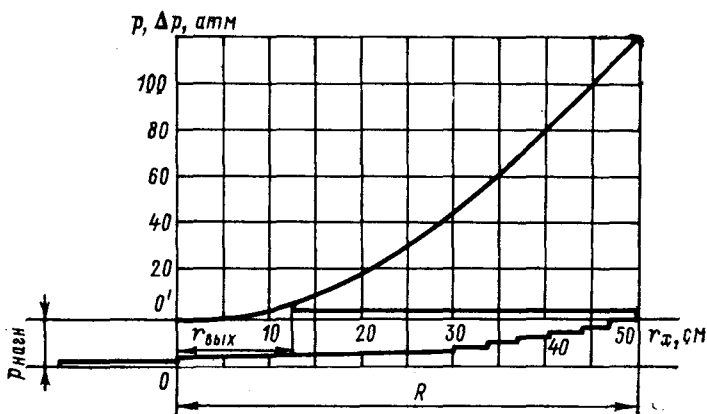


Рис. 9-11. Распределение давления в обмотке с водяным охлаждением машины мощностью 200 Мвт

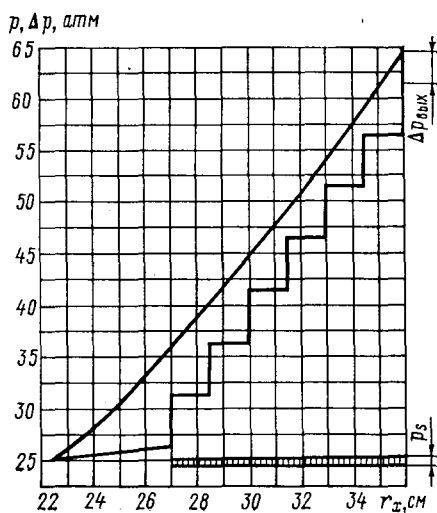


Рис. 9-12. Распределение давления в обмотке с водяным охлаждением машины мощностью 60 Мвт

Развитие эрозионного процесса характеризуется двумя безразмерными коэффициентами: числом кавитационного разрушения C_D и относительным числом каверн N .

$$C_D = \frac{S_e \Sigma_i}{N p_\infty R_{\text{макс}}}; \quad N = \frac{\omega_\infty t}{d \lambda_k},$$

где S_e — энергия деформации; Σ_i — суммарная средняя глубина эрозии; p_∞ — статическое давление до сужения; $R_{\text{макс}}$ — максимальный размер кавитационного пузырька; ω_∞ — скорость набегающего потока; t — продолжительность процесса; d — диаметр трубки в узком сечении; $\lambda_k = \frac{h}{d}$ — относительная длина каверны.

Мерой энергии деформации является площадь (вплоть до точки разрушения материала) диаграммы напряжение — деформация.

Для определения максимального радиуса кавитационного пузырька следует учесть внезапное изменение (в данном случае уменьшение) давления $p(t)$, имея в виду, что при дальнейшем сносе каверны в зону повышенного давления произойдет захлопывание.

При учете сил поверхностного натяжения, когда пузырек наполнен парами воды при насыщающем давлении p_s и постоянной массе газа в пузырьке, при условии адиабатного изменения объема получим:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{2\sigma}{R} - \frac{1}{\rho} \left(p_0 - p_s - \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} = \frac{1}{\rho} [p(t) - p_s],$$

где R_0 — начальный радиус пузырька; $\gamma = \frac{4}{3}$ — показатель адиабаты.

Полученное уравнение интегрируется в квадратурах для условия $p(t) = \text{const}$, что в нашем случае приемлемо.

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \left(R^3 \frac{dR}{dt} \right) = \frac{1}{\rho} 2R^2 \frac{dR}{dt} \left(\delta p - \frac{2\sigma}{R} \right),$$

где $\delta p = p_s - p_0$, получим

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\delta p}{\rho} (1 - z^3) - \frac{2\sigma}{\rho R_0} z (1 - z^2),$$

где $z = R_0/R$.

Поскольку кавитация не может начаться, если радиус ядра $R_0 < \frac{2\sigma}{\rho_0 - \rho_a}$, принимаем этот размер за начальный. Тогда

получим решение в форме графика на рис. 9-13. Если $R_0 = 15,0$ мкм, то $R_{\text{макс}} = 400,0$ мкм. Принимая: $\Sigma_i = 0,02$ (рис. 9-14); $d = 10$ мм; $\lambda_K = 1,0$; $\omega_\infty = 5$ м/сек, получим для разных металлов значения числа кавитационного разрушения S_D :

Медь	$0,70 \cdot 10^{-3}$
Сталь	$0,22 \cdot 10^{-3}$
Латунь	$0,88 \cdot 10^{-3}$
Нержавеющая сталь	$2,75 \cdot 10^{-3}$

Как можно видеть, медь наряду со сталью принадлежит к числу легко разрушаемых материалов в отличие от нержавеющей

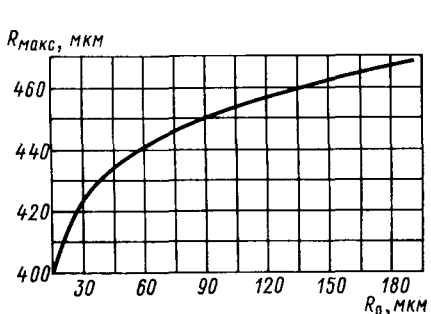


Рис. 9-13. Зависимость максимального радиуса пузырька от начального радиуса

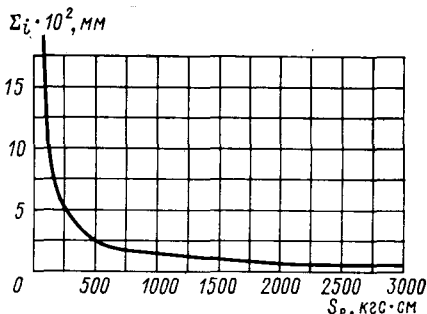


Рис. 9-14. Зависимость глубины эрозии от энергии деформации

щей стали. Отсюда следует, что кавитирующие переходы в зонах слива роторов более допустимы в каналах самого ротора, чем в каналах проводников обмотки.

Экспериментально было получено начало эрозионного разрушения меди в виде микровмятин, имеющих форму полусфер. После нескольких часов устойчивой кавитации эродирующая кромка канала в зоне срыва каверны оказалась покрытой мелкой насечкой матового оттенка.

Для количественной оценки потерь напора в месте сужения канала при наличии в нем устойчивой кавитационной зоны можно попытаться использовать методику расчета параметров каверны, применяемую для анализа некоторых случаев искусственной кавитации [30].

Суть методики сводится к следующему. Течение предполагается плоским и безвихревым, т. е. потенциальным. Это дает возможность применить в расчете методы теории функций комплексной переменной.

В самом деле, вектор скорости $\mathbf{w} = iu + jv$ может быть представлен в комплексной плоскости как $\mathbf{w} = u + iv$ и в то же время как градиент потенциальной функции $\mathbf{w} = \text{grad } \Phi$, ибо $\text{rot } \mathbf{w} = 0$. Можно убедиться, что сопряженная комплексная величина

$\bar{w} = u - iv$, представляющая зеркальное отражение w относительно действительной оси, есть дифференциал некоторой аналитической функции комплексных координат $F(z) = F(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$. Действительно,

$$dF(z) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial x} [\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)] dx + \\ + \frac{\partial}{\partial y} [\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)] dy = (u - iv) dx + (v + iu) dy = \\ = (u - iv) dx + i(u - iv) dy = (u - iv)(dx + idy) = \bar{w} dz,$$

так как $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$; $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v$.

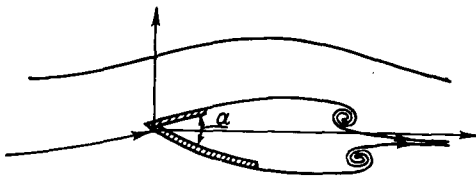


Рис. 9-15. Схема образования каверны

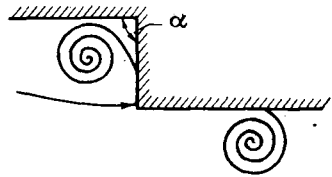


Рис. 9-16. Представление кромки сужения в качестве угла натекания

Таким образом, имеем:

$$\frac{dF}{dz} = \bar{w}; \quad F = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y); \quad z = x + iy; \quad w = u + iv.$$

Поскольку область каверны определяется лишь в результате решения задачи, функция $F(z)$, называемая комплексным потенциалом течения, и сопряженная скорость \bar{w} не могут быть записаны непосредственно как функции координат плоскости z . Для нахождения форм каверны (рис. 9-15) их выражают в качестве функции координат некоторой параметрической области, за которую принимают верхнюю полуплоскость комплексной плоскости t . При этом координаты z записываются как $z = \int \frac{dF}{w}$.

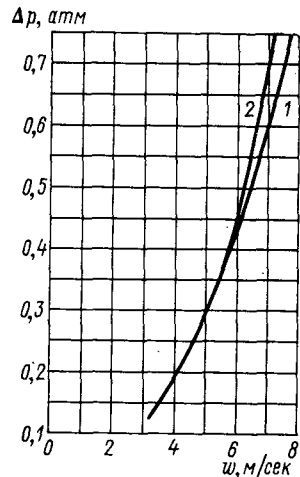


Рис. 9-17. Динамическая характеристика кавитации

1 — парабола, соответствующая движению без кавитации; 2 — потери напора при движении с кавитацией

Для удобства вычислений вместо функции w ищут ее логарифм $\omega = \ln w$. Нахождение F и ω сводится к конформному отображению этих (прямоугольных) областей на параметрическую область. Указанное отображение осуществляется интегралом Шварца — Кристоффеля. Знание функций ωt и $F(t)$ позволяет вычислить интеграл $z = \int \frac{dF}{w}$, т. е. размеры каверны.

Попытка применения изложенной методики для расчета динамических характеристик кавитации в круглом канале основывается на представлении кромки перехода широкого сечения в узкое (рис. 9-16) в качестве угла α предыдущей задачи. Если полагать, что такое представление дает размеры каверны с удовлетворительной точностью, то вторым допущением можно считать предположение о сужении канала за счет образования каверны.*

Для перехода с отношением сечений s_1/s_2 , равным 3,66, площадь каверны в итоге расчета составила 10% узкого сечения канала. Соответствующее такому сужению изменение потерь напора (0,025 атм при $\omega = 7$ м/сек) оказалось вдвое меньше экспериментального значения (рис. 9-17), полученного, правда, на установке, лишенной некоторых специальных приспособлений для точного измерения.

Глава десятая

ЗАТРАТЫ ЭНЕРГИИ НА ОХЛАЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

10-1. Классификация потерь в системах охлаждения

Затраты энергии на охлаждение относят к категории механических потерь электрической машины. При этом помимо потерь энергии, связанных с движением охлаждающих сред в каналах, или так называемых циркуляционных потерь, имеют в виду и потери трения поверхностей вращающихся частей, поскольку они также небезразличны к характеру движения охлаждающих сред.

Циркуляционные потери разделяются на потери в нагнетателях (вентиляторах и насосах) и потери во вращающихся каналах системы охлаждения.

Потери трения в соответствии с теорией турбомашин [26] состоят из дисковых потерь и потерь на цилиндрических поверхностях.

* Решение получил М. Б. Красник.

10-2. Циркуляционные потери

Этот вид потерь на охлаждение имеет основное значение с точки зрения оценки энергетических характеристик электрической машины. На циркуляцию затрачивается от 60 до 90% энергии, расходуемой в системе охлаждения. В то же время величина указанной энергии бывает значительной и зачастую регламентирует применение той или иной системы охлаждения. Поэтому понятно стремление освоить полное водяное охлаждение мощных гидрогенераторов с целью повысить их коэффициент полезного действия.

Механизм формирования необратимых потерь энергии в активном потоке, т. е. потоке, содержащем вращающиеся элементы, в своей принципиальной основе чрезвычайно прост. Циркуляционные потери представляют собой работу, черпаемую в единицу времени с вала электрической машины и определяемую турбинным уравнением Эйлера (гл. 6) независимо от типа нагнетательных элементов, которые в том или другом случае применены в системе охлаждения.

В то же время именно по вопросам расчета циркуляционных потерь высказывается наибольшее количество противоречивых рекомендаций и попросту ошибочных мнений. Причина тому — смешение двух различных понятий: понятия о необратимых потерях энергии в каналах тракта охлаждения (т. е. на аэродинамических или гидродинамических сопротивлениях) и понятия о количестве движения (энергии), сообщаемого охлаждающей среде валом электрической машины.

Из того факта, что все количество энергии, снятое с вала машины, расходуется в конечном итоге на сопротивлениях тракта (активных и пассивных), некоторые авторы делают ошибочный вывод, что эту энергию следует вычислять как сумму потерь на отдельных сопротивлениях.

Необходимо четко определить, что совершенно независимо от типа системы охлаждения и характера местных сопротивлений в ней затраты энергии на циркуляцию охлаждающей среды всегда равны произведению теоретического напора H_T (давления) нагнетательных элементов на величину расхода охлаждающей среды Q_Σ в указанных элементах: $\Delta p = \frac{H_T Q_\Sigma}{102}$, квт. По этой

причине нет необходимости суммировать все местные потери, что было бы во многих случаях чрезвычайно затруднительно.

Рассмотрим в качестве примера соотношение потерь энергии на циркуляцию воды в двух вариантах схемы водяного охлаждения обмотки ротора турбогенератора: самонапорной и насосной (см. гл. 9).

В самонапорной схеме гидравлические сопротивления вращающихся каналов являются одновременно внутренними сопротивлениями нагнетательных элементов. Здесь теоретический

напор ротора определяется известным соотношением $H_{т.р} = \rho u_2^2$ и потери равны его произведению на полезный расход воды Q независимо от принятой схемы циркуляции, в частности от длины каналов. Полезный напор (т. е. потери напора в обмотке) $\Delta H = \rho (u_2^2 - u_1^2)/2$. Таким образом, неиспользуемые затраты энергии пропорциональны разности $\rho u_2^2 - \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2) = \frac{\rho}{2} (u_2^2 + u_1^2)$ и расходуются на закручивание количества Q воды, которая выбрасывается на диаметре D_2 .

В случае применения насоса без использования напорных возможностей ротора гидравлические потери ΔH можно считать для простоты неизменными (на самом деле они незначительно возрастают за счет сопротивлений входа и выхода). Затраты энергии по-прежнему пропорциональны теоретическому напору (насоса) $H_{т.н.}$, однако последний определяется как $\Delta H/\eta$, где η — гидравлический к. п. д. насоса, учитывающий потери напора в нем самом.

Для сопоставления затрат энергии в обоих вариантах схемы следует анализировать $H_{т.р}/H_{т.н} = \rho u_2^2 2\eta/\rho (u_2^2 - u_1^2)$.

Как очевидно, указанное отношение определяется величиной η и радиусом входа воды в обмотку, т. е. величиной u_1 . Обычно оно больше единицы и возрастает при уменьшении ΔH , например при увеличении числа параллельных ветвей в схеме циркуляции.

Попытки сопоставить затраты энергии путем непосредственного вычисления суммы потерь на отдельных сопротивлениях схемы не только вносят путаницу в простые понятия, но и влекут за собой ошибочные выводы [32].

Сказанное особенно существенно по отношению к встроенным вентиляторам электрических машин. Их теоретический напор всегда может быть определен однозначно (гл. 6). Проблемой оказывается лишь определение суммарного расхода газа, циркулирующего через рабочее колесо.

Поскольку внутреннее сопротивление вентилятора является одним из элементов схемы вентиляции машины в целом, расход через вентилятор, включая и расход рециркуляции, определяется общим вентиляционным расчетом машины, в котором внутреннее сопротивление считается величиной известной.

Каким бы способом ни определялось внутреннее сопротивление вентилятора (продувка в аэродинамической трубе, расчет по подобию, расчет на основе эмпирических коэффициентов), расчет циркуляционных потерь может быть выполнен лишь после вентиляционного расчета машины и определения расхода газа через вентилятор. Это простое положение полезно иметь в виду при изучении различных методов расчета потерь в рабочих колесах осевых и центробежных вентиляторов [82].

Опыт исследования электрических машин показывает, что внутренние потери нагнетателей существенно зависят от усло-

вий входа и выхода, т. е. от расположения нагнетателей на валу. Особенности расположения трудно учитываются расчетным путем. По этой причине наиболее целесообразным следует считать метод непосредственных измерений в условиях, приближенных к эксплуатационным, с последующей статистической обработкой [12].

Особо подчеркнем, что при определении механических потерь электрической машины понятие гидравлического к. п. д. встроенного вентилятора лишено смысла, поскольку для расчета потерь всегда должен быть взят теоретический напор. Знание гидравлического к. п. д. и его зависимости от расхода может быть полезным лишь для оценки потерь напора в цепи вентилятора общей вентиляционной схемы машины. Однако и потери напора с методической точки зрения рационально определять непосредственно как функцию расхода, не прибегая к понятию к. п. д.

Величина коэффициента полезного действия нагнетателя должна быть известна в тех случаях, когда рассчитываются потери энергии в схемах с принудительной циркуляцией.

Циркуляционные потери в контурах, содержащих вращающиеся каналы, оцениваются вполне надежно, если в вентиляционном расчете учтено изменение сопротивления каналов при их вращении (см. гл. 8).

10-3. Потери трения

В зависимости от типа электрической машины основную роль играют либо потери трения на цилиндрических поверхностях (турбогенераторы, асинхронные машины, компенсаторы), либо дисковые потери (гидрогенераторы, крупные синхронные машины и машины постоянного тока).

Потери на цилиндрических поверхностях определяют по формуле:

$$\Delta p_{\text{ц}} = 5,73 \left(\frac{n}{3000} \right)^3 D^4 L, \text{ кет}, \quad (10-1)$$

в которой D и L — диаметр и длина ротора, m ; n — скорость вращения, $об/мин$. При водородном охлаждении в формулу (10-1) добавляют сомножитель $p/10$, где p — абсолютное давление газа, $атм$.

Физическая природа формирования потерь довольно сложна, и можно считать, что нетривиальной особенностью процесса является его практическая независимость от величины зазора между ротором и расточкой статора и от режима движения. Несмотря на четкое разграничение возможных движений на четыре зоны, две из которых (ламинарная и турбулентная) характеризуются наличием замкнутых, так называемых тэйлоровских вихрей [26], коэффициенты трения вполне определяются числами Рейнольдса и практически не зависят от чисел Тэйлора. Во

всяком случае разница между величинами потерь трения при вращении роторов в расточке статора и в свободном пространстве весьма незначительна.

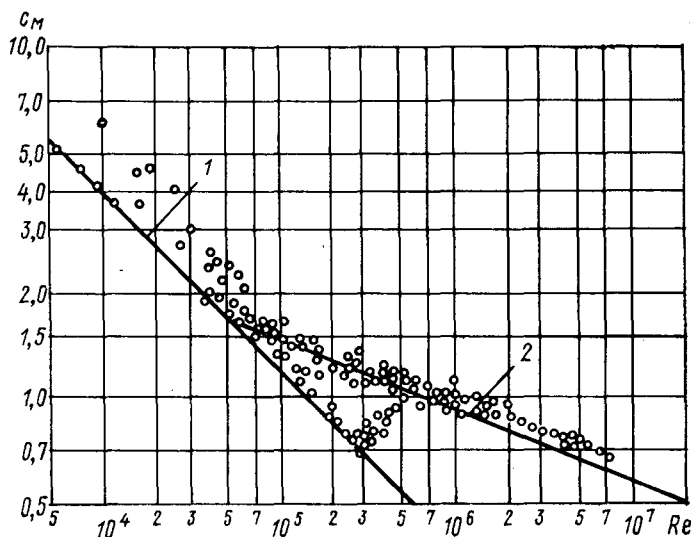


Рис. 10-1. Зависимость коэффициента сопротивления диска от режима движения
1 — ламинарный режим; 2 — турбулентный режим

Дисковые потери (в расчете на две стороны ротора)

$$\Delta p_d = C_M \frac{\rho}{2} \frac{n^3 R^5}{0,88} 10^{-3}, \text{ квт}, \quad (10-2)$$

где R — наружный радиус ротора в метрах. Коэффициент момента сопротивления C_M зависит от режима движения и конструкции. Для разных типов движения C_M рассчитывается по следующим формулам:

Ламинарное движение	$3,87 Re^{-0,5}$
Турбулентное движение	$0,146 Re^{-0,2}$
Турбулентное движение вблизи кожуха (щита машины)	$0,0277 \left(Re \frac{s}{R} \right)^{-0,2}$

В приведенных формулах число Рейнольдса определяется по формуле $R^2 \omega / \nu$ и s есть расстояние от торцевой поверхности ротора до щита. Сопоставление расчета с экспериментом проведено на рис. 10-1.

ДВИЖЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Глава одиннадцатая

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

11-1. Поле температуры, его аналитическое и графическое представление. Градиент температуры

Температура ϑ в любой точке пространства является функцией места и времени, т. е. функцией координат точки (x, y, z) и времени t :

$$\vartheta = f(x, y, z, t) = f(r, t). \quad (11-1)$$

Совокупность значений температуры во всех точках рассматриваемой части пространства в какой-либо фиксированный момент времени называется полем температуры. Уравнение (11-1) служит математической формулировкой такого поля. Если температура зависит от времени, то поле называется неустановившимся или нестационарным. Если же температура во времени не меняется, поле называется установившимся или стационарным.

Температурное поле может быть функцией трех координат (x, y, z) , двух (x, y) и одной (x) . В соответствующих случаях оно получает наименование трехмерного, двумерного и одномерного. Простейший вид имеет уравнение одномерного стационарного поля:

$$\vartheta(x) = f(x).$$

Геометрическое место точек поля, имеющих одинаковую температуру, образует изотермическую поверхность. Так как в одной точке поля не может быть одновременно двух значений температуры, то изотермические поверхности, соответствующие разным температурам, не пересекаются. Все они или замыкаются на себя, или оканчиваются на границах тела.

Как очевидно из сказанного, при перемещении по изотермической поверхности нельзя заметить изменения температуры. Изменение температуры можно наблюдать лишь при перемещении по любому направлению s , пересекающему изотермические

поверхности. Наиболее резкое изменение температуры получится при перемещении по нормали к изотермическим поверхностям.

При пересечении поля температуры какой-либо плоскостью, например плоскостью чертежа, изотермические поверхности образуют на этой плоскости следы в виде линий, называемых изотермами (рис. 11-1). Кратчайшим расстоянием между двумя изотермами является отрезок между ними, отложенный по нормали.

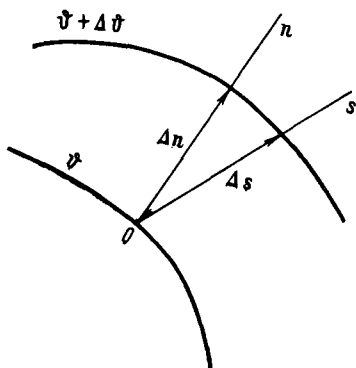


Рис. 11-1. Линии равной температуры

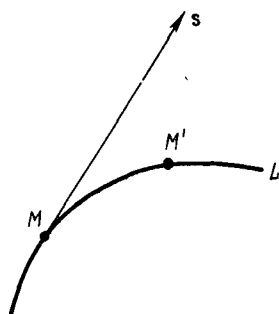


Рис. 11-2. К определению понятия градиента

Предел отношения изменения температуры $\Delta\vartheta$ к расстоянию между изотермами по нормали Δn называется градиентом температуры

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta n} = \frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \text{grad } \vartheta; \text{ град/м.} \quad (11-2)$$

Таким образом, градиент температуры является вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в данной точке поля. Его положительным направлением считается направление возрастания температуры.

Понятие градиента входит в формулировку основного закона теплопроводности и поэтому заслуживает более подробного рассмотрения. К нему приводит простейшая дифференциальная операция в векторном смысле, именно операция определения производной в поле скалярной величины ϑ по произвольному направлению s .

Пусть дано поле $\vartheta(\mathbf{r}) = \vartheta(x, y, z)$. Если выбрать (рис. 11-2) некоторую точку поля M и соединить с ней точку M' , лежащую на какой-либо кривой ML , касательная к которой в точке M имеет направление s , то значение производной $d\vartheta/ds$, т. е. производной скаляра ϑ по направлению s , можно определить поль-

зуюсь выражением ϑ как сложной функции от s через координаты x, y, z :

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cos(\widehat{s, x}) + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \cos(\widehat{s, y}) + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \cos(\widehat{s, z}). \quad (11-3)$$

Известно, что для любого вектора

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

составляющая по произвольному направлению s

$$a_s = a_x \cos(\widehat{s, x}) + a_y \cos(\widehat{s, y}) + a_z \cos(\widehat{s, z}).$$

Поэтому величину $d\vartheta/ds$ по выражению (11-3) можно рассматривать как проекцию некоторого вектора (назовем его $\text{grad } \vartheta$) на направление s :

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = |\text{grad } \vartheta| \cos(\widehat{s, \text{grad } \vartheta}), \quad (11-4)$$

причем

$$\text{grad } \vartheta = i \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + j \frac{\partial\vartheta}{\partial y} + k \frac{\partial\vartheta}{\partial z}.$$

Проекция этого вектора поля на направление s как раз и дает производную скаляра ϑ по направлению s (11-4). Рассматриваемая производная имеет наибольшее значение, когда $\cos(\widehat{s, \text{grad } \vartheta}) = 1,0$, т. е. когда направление дифференцирования совпадает с направлением вектора $\text{grad } \vartheta$. Отсюда

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s} \right)_{\text{макс}} = |\text{grad } \vartheta|$$

и

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial s} \text{ при } \cos(\widehat{s, \text{grad } \vartheta}) = 1,0.$$

Градиент ϑ есть производная скаляра ϑ по тому направлению, по которому эта производная имеет максимальное значение, т. е. направлению быстрого изменения скаляра ϑ (11-2).

11-2. Основной закон теплопроводности

При наличии градиента температуры (11-2) в поле происходит распространение тепловой энергии от более нагретых точек (т. е. имеющих более высокую температуру) к менее нагретым, следовательно, в направлении, противоположном направлению вектора градиента.

Основной закон теплопроводности, сформулированный Фурье в итоге анализа экспериментальных данных, устанавливает

количественную связь между потоком тепла и разностью температур в двух точках тела: *

количество переданного тепла пропорционально градиенту температуры, времени и площади сечения F , перпендикулярного к направлению распространения тепла.

Если количество переданного тепла отнести к единице времени, то сформулированная зависимость выразится следующим образом:

$$p = -\lambda F \text{ grad} \vartheta, \text{ вт.} \quad (11-5)$$

Здесь знак минус характеризует направление теплового потока относительно направления внешней нормали к изотерме в данной точке поля.

Коэффициент пропорциональности λ в уравнении (11-5) называется коэффициентом теплопроводности. Он является физическим параметром вещества и характеризует способность вещества проводить тепло, $\lambda = -p / (F \text{ grad } \vartheta)$. Величина коэффициента теплопроводности определяет количество тепла, которое проходит в единицу времени через единицу поверхности стенки при изменении температуры на один градус на единицу длины пути теплового потока.

В электромашиностроении часто применяют в качестве единицы измерения коэффициента теплопроводности величину $1 \text{ вт} / (\text{см} \cdot \text{град})$, т. е. в сто раз меньшую, чем $1 \text{ вт} / (\text{м} \cdot \text{град})$ в системе СИ. В теплотехнике обычно употребляются тепловые единицы энергии. Полезно учитывать в практике следующие соотношения:

$$1 \frac{\text{вт}}{\text{см} \cdot \text{град}} = 86 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}} ;$$
$$1 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}} = 1,16 \cdot 10^{-2} \frac{\text{вт}}{\text{см} \cdot \text{град}} .$$

Коэффициент теплопроводности различных веществ зависит от их молекулярной структуры, удельного веса, теплоемкости, вязкости, влажности и температуры. Эти зависимости обычно мало существенны для тепловых расчетов электрических машин, в связи с чем в расчетах применяются средние табличные величины.

В дальнейшем все встречающиеся тела и среды будем считать изотропными, т. е. с одинаковыми во всех направлениях структурой и свойствами. Исключение составляет лишь электротехническая сталь, анизотропность которой заставляет различать теплопроводность вдоль и поперек пакета листов. Кроме того, играет

* Строго говоря, формулировку Фурье следует считать гипотезой, правильность которой подтверждается совпадением с опытом результатов применения математической теории теплопроводности, построенной на этой гипотезе.

роль химический состав стали, который может изменять коэффициент теплопроводности в сравнительно широких пределах.

Ниже приведены величины коэффициента теплопроводности для различных, наиболее употребляемых в электромашиностроении активных и изоляционных материалов. Эти данные следует рассматривать как средние статистические, т. е. требующие приближения к конкретным условиям, когда проводятся наиболее ответственные или специфические расчеты.

Коэффициент теплопроводности проводниковых и конструкционных материалов, $вт/(м \cdot град)$ принимает значения:

Медь	380	Никель	58
Алюминий	320	Сталь	50
Серебро	420	Чугун	45

Коэффициент теплопроводности изоляционных материалов, $вт/(м \cdot град)$ принимает значения:

Битумная изоляция на миканите	0,16	Резина	0,15
Терморезистивная изоляция	0,26	Стекловата	0,04
Электрокартон	0,18	Фарфор	1,20
Гетинакс	0,25	Кожа	0,40
Эбонит	0,13	Дерево	0,30
Слюда	0,58	Асбест	0,11
Стекло	0,75	Трансформаторное масло	0,12

Теплопроводность шихтованной активной стали в направлении пакета листов характеризуется коэффициентом продольной теплопроводности стали. Он зависит главным образом от химического состава стали, в первую очередь от содержания кремния. Теплопроводность стали в направлении поперек пакета характеризуется коэффициентом поперечной теплопроводности. Он зависит главным образом от технологии изготовления шихтованных элементов, в первую очередь от давления спрессовки пакетов. Существенную роль играет также тип применяемого изоляционного покрытия.

Данные о величине коэффициентов продольной и поперечной теплопроводности крайне немногочисленны. Ниже приведены значения этих коэффициентов, заимствованные у Г. Готтера [17].

Коэффициент продольной теплопроводности кремнистой листовой стали ($вт/(м \cdot град)$) при различном содержании кремния принимает значения:

Нормальная сталь (0,4—0,8%)	48—41
Слаболегированная сталь (0,6—1,2%)	44—35
Среднелегированная сталь (1,8—2,3%)	30—26
Высоколегированная сталь (3,6—4,2%)	20—19

Для шихтованных пакетов активной стали имеем:

Давление спрессовки, $кг/см^2$	0,058	1,060	2,300	4,300	7,120	9,222
Коэффициент теплопроводности, $вт/(м \cdot град)$	0,27	0,52	0,60	0,64	0,69	0,72

11-3. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим баланс энергии в элементе активного объема электрической машины (рис. 11-3). Закон сохранения энергии применительно к произвольному элементу объема может быть сформулирован следующим образом:

тепло dp_1 , подведенное к элементу объема dV в результате теплопроводности, и тепло dp_2 , выделившееся в данном элементе, расходуются на повышение теплосодержания dp элемента: $dp = dp_1 + dp_2$.

Тепло dp_{1x} , подведенное к элементу в направлении оси x , складывается из теплового потока dp'_{1x} через грань $ABCD$ за вычетом потока dp''_{1x} через грань $KLMN$.

В соответствии с основным законом теплопроводности

$$dp'_{1x} = -\lambda_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dydz;$$

$$dp''_{1x} = -\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right) dydz.$$

Рис. 11-3. Объемный элемент поля температуры

Разность обоих значений равна:

$$dp_{1x} = dp'_{1x} - dp''_{1x} = \lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx dy dz.$$

Аналогично

$$dp_{1y} = \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} dx dy dz;$$

$$dp_{1z} = \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} dx dy dz.$$

Тепло, выделившееся в объеме $dV = dx dy dz$, может быть определено, если известна производительность единицы объема p_0 вт/м³, которую называют также удельной мощностью источника тепла:

$$dp_2 = p_0 dV = p_0 dx dy dz.$$

Следует заметить, что величина p_0 , вообще говоря, может зависеть от места и времени, т. е. $p_0 = f(x, y, z, t)$.

Изменение теплосодержания dp элемента объема равно весу элемента γdV , умноженному на теплоемкость c и на изменение температуры элемента $\partial \vartheta / \partial t$:

$$dp = c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx dy dz.$$

Таким образом,

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx dy dz = \left(\lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) dx dy dz + p_0 dx dy dz,$$

или после сокращения на элемент объема

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + p_0. \quad (11-6)$$

Уравнение (11-6) называется уравнением теплопроводности.

Как видим, это дифференциальное уравнение для трехмерного нестационарного поля температуры. Оно устанавливает связь между изменениями температуры в пространстве и во времени и описывает процесс переноса тепла внутри тела.

11-4. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности

Договоримся считать, что температура внутри тела является непрерывной функцией места (x, y, z) и времени (t) и что ее первая производная по времени и первая и вторая производные по координатам также непрерывны. Любая физическая задача удовлетворяет таким требованиям.

Однако условия распределения температуры на границе тела и охлаждающей среды и условия в начальный момент времени должны быть сформулированы особо. Как известно, единственность решения дифференциального уравнения обеспечивается лишь в том случае, когда заданы так называемые краевые условия. Краевые условия определяются непосредственными результатами экспериментов или их математической трактовкой.

Начальное условие, или временное краевое условие задает распределение температуры в начальный момент времени:

$$\vartheta_{t=0} = f(x, y, z). \quad (11-7)$$

Это как бы нулевая координата по времени, от которой ведется дальнейший отсчет. Логически очевидно, что без такого задания всякая нестационарная задача становится неопределенной. Простейшим примером начального условия является постоянство температуры во всем объеме тела в начальный момент времени:

$$\vartheta_{t=0} = \vartheta_0 = \text{const.}$$

Часто для простоты в качестве такой константы выбирают нулевую температуру. В электрических машинах более типичным является задание температуры установившегося режима, который предшествовал анализируемому. Если это был режим покоя, то начальной температурой для всей машины была температура машинного зала. Если предшествующим режимом был режим нагрузки, то должно быть задано пространственное распределение температуры в рассматриваемом элементе конструкции, например распределение температуры вдоль стержня обмотки.

Как мы видим, функция (11-7), задающая начальное распределение температуры, может быть произвольной. В результате же решения уравнения получим функцию $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$, которая должна быть решением в любой момент времени, в том числе и в начальный ($t=0$). Но, как вполне очевидно, имеющаяся в виду подстановка никак не может дать произвольную функцию. Таким образом, возникает представление (рис. 11-4) о нарушении требования непрерывности функции в начальный момент времени (начальное распределение температуры не равно распределению после подстановки).

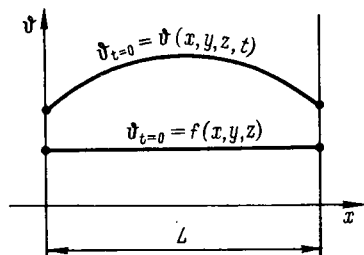


Рис. 11-4. К трактовке начального условия

Чтобы устранить это кажущееся противоречие, необходимо понимать смысл получаемых решений уравнения теплопроводности следующим образом:

решение уравнения должно быть таким, чтобы для всех точек тела выполнялось условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vartheta(x, y, z, t) = f(x, y, z). \quad (11-8)$$

Следовательно, подстановка значения $t=0$ в решение $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$ не обязательно должна давать функцию $f(x, y, z)$. Для проверки правильности полученного решения необходимо убедиться, что при приближении времени к начальному моменту температура в любой точке тела стремится к начальной температуре в данной точке. При таком подходе кажущиеся разрывы непрерывности температуры в начальный момент времени (рис. 11-4) стремятся исчезнуть при наличии конечных приращений времени процесса теплопроводности.

Перейдем к рассмотрению пространственных краевых условий, или граничных условий. Граничное условие задает закон взаимодействия между поверхностью тела и окружающей средой. Придерживаясь распространенной терминологии, будем различать три основных типа граничных условий.

1. Граничные условия первого рода, когда на поверхности тела задано распределение температуры в любой момент времени:

$$\vartheta_{\text{пов}} = \varphi(t).$$

2. Граничные условия второго рода, когда на поверхности тела задано значение производных: $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Psi_1(t)$; $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \Psi_2(t)$; $\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \Psi_3(t)$. К этим условиям приводит задание величин составляющих теплового потока (p_x, p_y, p_z), который проходит через граничную поверхность в заданном направлении. Если, например, через торцовую поверхность на конце стержня длиной L проходит тепловой поток $p_{L(t)} = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, то $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Psi_1(t)$, где $\Psi_1(t)$ — извест-

ная функция, которая выражается через заданный тепловой поток $p_{x,t}$ по формуле $\Psi_1(t) = -\frac{p_L(t)}{\lambda}$.

Следует подчеркнуть, что функция $\Psi(t)$ зависит лишь от закона прохождения теплового потока через граничную поверхность и может быть произвольной, например синусоидальной функцией времени.

3. Граничные условия третьего рода, когда на поверхности тела задается линейное соотношение между производной и функцией. Например, в направлении оси Ox .

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} [\vartheta_L(t) - \vartheta_c(t)].$$

К граничному условию третьего рода приводит применение так называемого закона Ньютона для теплообмена на границе твердого тела и окружающей среды (жидкой или газообразной):

$$p_x = \alpha(\vartheta_L - \vartheta_c) F, \quad (11-9)$$

где p_x — тепловой поток; α — коэффициент теплообмена (его часто называют коэффициентом теплоотдачи); ϑ_c — температура окружающей среды; ϑ_L — температура поверхности тела; F — величина поверхности.

Так как по закону теплопроводности тепловой поток, проходящий через граничную поверхность, $p = p_x = -\lambda_x \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L}$, приравняв оба выражения для потока, получим

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda_x} [\vartheta_L(t) - \vartheta_c(t)],$$

где $\vartheta_c(t)$ — заданная функция.

Для сечения $x=0$ стержня (O, L) граничное условие третьего рода имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = +\frac{\alpha}{\lambda_x} [\vartheta_0(t) - \vartheta_c(t)].$$

В качестве частного случая граничных условий третьего рода могут рассматриваться граничные условия первого рода. В самом деле, задание определенной температуры поверхности тела можно интерпретировать как задание температуры окружающей среды при бесконечно большом значении коэффициента теплообмена. В этом случае разность температур поверхности и среды равна нулю, т. е., проще говоря, поверхность приобретает температуру среды:

$$\vartheta_L(t) - \vartheta_c(t) = \lim_{\alpha/\lambda_x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha/\lambda_x} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_L = 0.$$

Добавим еще, что закон Ньютона (11-9) подтверждается экспериментально, если принять, что коэффициент теплообмена зависит от физических характеристик поверхности и среды и от температуры. Указанная зависимость определяется из эксперимента, построенного на основе соотношения (11-9), и имеет вид $\alpha = \alpha(\gamma, \nu, c, \omega, \Delta, \theta)$, где параметрами являются удельный вес, вязкость, теплоемкость, скорость среды, а также степень шероховатости поверхности и температура. Коэффициент теплообмена измеряется в *вт (м²·град)* или *ккал/(ч·м²·град)*. Численные значения коэффициентов теплообмена для важных практических случаев приведены в приложении 2.

Математическая интерпретация граничных условий аналогична интерпретации начальных условий. Граничные условия следует понимать в том смысле, что для фиксированного момента времени $t > 0$ комбинация температуры и ее производных, даваемая решением уравнения теплопроводности, стремится к заданной величине при приближении точки к поверхности. Иными словами, не следует требовать, чтобы граничным условиям удовлетворяла температура на самой поверхности, получаемая путем подстановки соответствующих координат в решение. Должно быть обеспечено лишь соблюдение предельного соотношения.

Завершая рассмотрение граничных условий, отметим, что при плотном контакте двух тел тепловой поток через поверхность соприкосновения может иметь лишь единое для обоих тел значение (граничное условие четвертого рода). Следовательно, граничное условие приобретает вид:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right),$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности соприкасающихся тел.

11-5. Классификация краевых задач уравнения теплопроводности

Даже при задании конкретных краевых условий уравнение (11-6) не может быть решено для нестационарного поля температуры в трехмерном анизотропном пространстве. Однако в практике проектирования электрических машин решение в столь общей постановке и не требуется.

Практический интерес представляют задачи, поставленные с учетом упрощений, которые диктуются особенностями конструкции и режима работы каждого данного типа электрической машины. Прежде всего следует различать задачи для стационарного и нестационарного полей.

К первому классу задач относится анализ установившихся режимов нагрузки генераторов или двигателей, одной из основных характеристик которых является температура активных частей при номинальной нагрузке. В этом случае производная по вре-

мени в уравнении теплопроводности пропадает и оно приобретает вид:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + p_0 = 0. \quad (11-10)$$

Для тел произвольной геометрической формы уравнение (11-10) также неразрешимо. Но в электрических машинах часто соблюдено условие симметрии, позволяющее свести уравнение стационарного процесса к двумерному виду:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + p_0 = 0. \quad (11-11)$$

В случае изотропного материала последнее уравнение естественно упрощается до вида:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{p_0}{\lambda} = 0. \quad (11-12)$$

В тех случаях, когда перенос тепла практически осуществляется лишь в одном направлении, имеем одномерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{p_0}{\lambda} = 0. \quad (11-13)$$

Определенный интерес может представить решение задачи по расчету температуры в телах, не содержащих источников тепла, но являющихся проводниками теплового потока. К таким элементам с некоторыми оговорками могут быть отнесены массивные изоляционные детали и металлические детали вне активной зоны машины. В этих случаях поле температуры называется полем без внутренних источников тепла и в стационарных задачах описывается уравнением

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (11-14)$$

или в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0. \quad (11-15)$$

Полезно все же подчеркнуть, что основные элементы конструкций электрических машин содержат источники тепла, в связи с чем уравнение теплопроводности для электрических машин является, как правило, неоднородным.

Класс задач, относящихся к нестационарному полю температуры, актуален для режимов переменной нагрузки генераторов и двигателей и для случаев резкого изменения параметров режима энергетических установок. Уравнение теплопроводности нестационарного поля решено для условий одномерного распространения тепла и для отдельных двумерных задач. В одномерном случае имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{p_0}{c\gamma}, \quad (11-16)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ — коэффициент температуропроводности материала, характеризующий скорость протекания температурных процессов.

Некоторые характерные значения коэффициента температуропроводности a , m^2/c , для различных материалов приведены ниже:

Медь	0,325
Алюминий	0,400
Сталь	0,045
Асбест	$0,712 \cdot 10^{-3}$
Резина	$0,352 \cdot 10^{-3}$
Стекло	$1,600 \cdot 10^{-3}$

11-6. Упрощение (редукция) общей задачи теплопроводности

Общая задача теплопроводности может быть разбита на несколько более простых задач, решения которых в сумме дают решение общей задачи. Итоговое решение должно удовлетворять исходному уравнению и краевым условиям. Рассмотрим несколько важных примеров*.

1. Условия на поверхности и мощность источников тепла не зависят от времени (так называемая стационарная неоднородность уравнения теплопроводности):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \nabla^2 \vartheta + \frac{p_0(x, y, z)}{c\gamma}, \quad \vartheta_{t=0} = f(x, y, z) \text{ — начальное условие,}$$

$$\vartheta_F = \varphi(x, y, z) \text{ — условие на поверхности.}$$

Возьмем решение уравнения

$$a \nabla^2 u + \frac{p_0(x, y, z)}{c\gamma} = 0$$

при

$$\vartheta_F = \varphi(x, y, z)$$

и присоединим к нему решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \nabla^2 w,$$

при $w_{t=0} = f(x, y, z)$ — u и $w_F = 0$.

Тогда для

$$\vartheta = u + w$$

будем иметь

$$\vartheta_F = \varphi(x, y, z); \quad \vartheta_{t=0} = f(x, y, z).$$

* Если чтение данного параграфа затруднительно, целесообразно изучить вначале материал § 12-2, 12-4, в которых аналогичные вопросы рассмотрены в менее общей постановке.

Следовательно, решение $\vartheta = u + w$ удовлетворяет исходному уравнению и краевым условиям, т. е. всем условиям задачи.

Таким образом, при решении задачи для неустановившегося теплового процесса, когда распределение источников тепла внутри тела и температура на границах не зависят от времени, можно взять два решения: для установившегося процесса с заданными условиями на границах и для неустановившегося процесса с нулевыми условиями на границах и заданной начальной температурой, но при отсутствии источников тепла. Сумма указанных двух решений и будет решением исходной задачи для неустановившегося теплового процесса в поле с внутренними источниками тепла при ненулевых граничных условиях.

2. Условия на поверхности (граничные условия) являются заданными функциями времени:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \nabla^2 \vartheta + \frac{\rho_0(x, y, z)}{c\gamma}, \quad \vartheta_{t=0} = f(x, y, z) \text{ — начальное условие,}$$

$$\vartheta_F = \varphi(x, y, z, t) \text{ — условие на поверхности.}$$

В данном случае нужно решить задачу для поля без источников тепла с заданными условиями на поверхности и нулевым начальным условием:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = a \nabla^2 m$$

при $m_{t=0} = 0$ и $m_F = \varphi(x, y, z, t)$ и задачу для поля с заданным распределением источников, заданной начальной температурой и нулевой температурой на поверхности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a \nabla^2 n + \frac{\rho_0(x, y, z)}{c\gamma}$$

при $n_{t=0} = f(x, y, z)$ и $n_F = 0$.

Тогда $\vartheta = m + n$ удовлетворит всем условиям исходной задачи.

Решение n было получено выше при рассмотрении первой исходной задачи: $n = u + w$, где $u_F = 0$. Рассмотрим теперь решение задачи для функции m . Это решение может быть записано на основании теоремы Дюамеля, которую мы приводим без доказательства [33]:

если $\Theta_0 = F(x, y, z, t)$ соответствует температуре в момент времени t в точке (x, y, z) тела, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при постоянной температуре, то решение задачи при условии, что поверхность поддерживается при температуре $\varphi(t)$, записывается в виде:

$$\Theta = \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, t - \tau) d\tau.$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид $\vartheta = m + n = \Theta + u + \omega$, т. е. разбивается на две более простых задачи, из которых вторая, в свою очередь, разбивается на две простейшие задачи.

При других краевых условиях задача может быть расчленена (редуцирована) аналогичным образом, причем число возможных комбинаций достаточно велико. Ниже мы столкнемся с некоторыми из них. Более строгое обоснование допустимости редукции общей задачи читатель может найти в специальных руководствах [60].

3. Уравнение теплопроводности имеет частный вид, отвечающий условиям охлаждения с поверхности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \nabla^2 \vartheta + ab\vartheta + \frac{p_0}{c\gamma}.$$

Как мы увидим в дальнейшем, это уравнение применяется при исследовании нагрева отдельных элементов электрических машин. Подстановкой $\vartheta = ue^{-abt}$ оно приводится к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla^2 u + \frac{p_0}{c\gamma} e^{-abt},$$

решение которого может быть получено в зависимости от краевых условий одним из изложенных выше методов.

11-7. Основы теории подобия

Обзор краевых задач уравнения теплопроводности для электрических машин показывает, что решения уравнения в силу его неоднородности не всегда могут быть получены. Существующие решения схематизируют процесс теплообмена и при этом оказываются громоздкими. Все эти обстоятельства приводят к необходимости тщательной экспериментальной проверки теоретических результатов и экспериментального исследования неизученных конструкций.

Однако постановка эксперимента также должна быть научно обоснованной. В противном случае результаты эксперимента на модели могут быть ошибочно распространены на оригинал.* Возможна и другая ошибка. Трудоемкий и дорогостоящий эксперимент будет произведен там, где в этом не было бы необходимости при правильном использовании уже имеющихся опытных данных.

Научную основу эксперимента дает теория подобия, которая называется также теорией моделей.

При постановке теплофизического эксперимента, так же, впрочем, как и при постановке другого, например аэродинамического, эксперимента, существенно важно получить ответ на

* Терминология теории подобия.

следующие три вопроса: 1) какие величины измерять в эксперименте; 2) как обрабатывать результаты измерений; 3) какие явления и объекты подобны изучаемому, т. е. на какой класс конструкций могут быть распространены полученные выводы (см. § 5-2).

Теория подобия дает ответ на эти вопросы.

Определение подобия. Прежде чем приступить к изложению основных теорем теории подобия, дадим некоторые основные определения, в том числе определение геометрического подобия, имея в виду, что многие понятия возникли именно в сфере геометрии.

Как известно, в подобных геометрических фигурах соответственные углы равны и отношение сходственных сторон есть

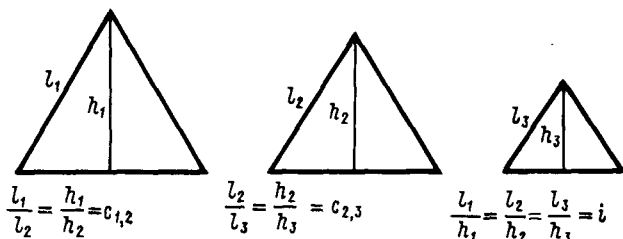


Рис. 11-5. Константы и инварианты подобных фигур

одно и то же число, называемое константой подобия (рис. 11-5):

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = \frac{h''}{h'} = c_l. \quad (11-17)$$

Назовем выражение (11-17) первой математической формулировкой понятия подобия. Из этой формулировки следует, что при переходе от одного элемента подобных систем к другим элементам той же размерности константа подобия неизменна. Однако при переходе к новой, тоже подобной системе, константа подобия изменяет свое значение (отношение сторон первого и третьего треугольников не равно отношению сторон первого и второго или второго и третьего треугольников).

Константы подобия разных размерностей могут выражаться одна через другую. Например, для отношения площадей подобных фигур будем иметь $c_s = c_l^2$, для отношения объемов $c_v = c_l^3$.

Обратим теперь внимание на то, что из подобия треугольников (рис. 11-5) также следует

$$\frac{l_1'''}{h'''} = \frac{l_1''}{h''} = \frac{l_1'}{h'} = i_1; \quad \frac{l_2'''}{h'''} = \frac{l_2''}{h''} = \frac{l_2'}{h'} = i_2. \quad (11-18)$$

Назовем выражение (11-18) второй математической формулировкой понятия подобия, а отношения i_1, i_2 — инвариан-

тами подобия. Как можно видеть, существенным отличием инвариант подобия от констант подобия является то обстоятельство, что они остаются неизменными при переходе от одной подобной системы к другой, но изменяются при переходе от одного элемента данной системы к другому (отношение сторон треугольника к высоте не равно отношению другой стороны этого же треугольника к высоте).

Поскольку любое физическое явление проявляется в форме изменения величин, характеризующих состояние той или иной материальной системы, то распространение понятия подобия на класс физических явлений означает требование подобия полей физических параметров. Иными словами, физически подобными оказываются те явления, одноименные величины которых находятся в постоянном отношении. Эта очевидная, но слишком общая формулировка подобия физических явлений мало пригодна для практического применения, так как бывает сложно или даже невозможно продемонстрировать сходственность всех влияющих на процесс параметров.

Легко показать, что константы и инварианты подобия у подобных физических явлений связаны между собой в соответствии с физическими законами, связывающими самые явления. Например, для скорости движения $\omega = L/t$ константами подобия, как очевидно, будут:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = c_\omega; \quad \frac{L_2}{L_1} = c_L; \quad \frac{t_2}{t_1} = c_t.$$

Но так как $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{L_2 t_1}{t_2 L_1}$, то для разных систем получим отношения в виде новых безразмерных величин или инвариант

$$\frac{\omega_2 t_2}{L_2} = \frac{\omega_1 t_1}{L_1} = \text{Но} = \text{idem (неизменная величина)}. \quad (11-19)$$

Полученная инварианта подобия Но называется критерием гомохронности.

Физический закон определяет также связь между константами подобия. Как очевидно,

$$\frac{\omega_2 t_2 / (\omega_1 t_1)}{L_2 / L_1} = \frac{c_\omega c_t}{c_L} = 1. \quad (11-20)$$

Отношение типа (11-20), равное единице и всегда существующее для подобных явлений, называется индикатором подобия.

Первая теорема подобия (Ньютона). Эта теорема относится к явлениям, факт подобия которых уже установлен. Она формулируется так:

у подобных явлений инварианты подобия равны, индикаторы подобия равны единице.

Важнейший смысл первой теоремы заключается в указании экспериментатору величин, которые подлежат измерению в опыте. При этом естественно предполагается, что форма инвариант (критериев) подобия известна заранее (ниже будут даны критерии теплофизических процессов, критерии гидродинамического подобия получены в § 5-2).

На основании первой теоремы можно утверждать, что измерение величин, не входящих в формулы инвариант изучаемого явления, лишено смысла. В то же время обязательно должны быть измерены все без исключения величины, формирующие критерии. Существует другая, тоже распространенная формулировка первой теоремы подобия: подобные явления описываются буквенно одинаковыми уравнениями, которые инвариантны по отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин.

Вторая теорема теории подобия (Букингема). Вторая теорема отвечает на вопрос о том, как правильно обрабатывать результаты эксперимента. Она утверждает:

всякое уравнение физического явления может быть выражено в виде зависимости между инвариантами (критериями) подобия.

Это утверждение, практически используемое нами при решении некоторых краевых задач (гл. 12), позволяет экспериментатору искать связь между определенными комплексами параметров, что значительно облегчает процесс обобщения опытных данных.

Третья теорема теории подобия (Кирпичева). До сих пор мы исходили из того, что факт подобия модели и оригинала установлен. Определим теперь, какие именно явления можно считать подобными. Для ответа на этот наиболее сложный вопрос придется оперировать новым понятием условий однозначности.

Условия однозначности — это такие уравнения связи между величинами изучаемого явления, которые необходимо добавить к общим уравнениям всего класса явлений для выделения из этого класса одного определенного явления.

Как известно, из бесчисленного количества решений какого-либо дифференциального уравнения, конкретное решение может быть выделено лишь при дополнительном задании краевых условий. Таким образом, к условиям однозначности следует отнести геометрические характеристики объекта и краевые условия. Заметим, что инварианты (критерии), составленные из условий однозначности, называются определяющими критериями.

Теперь может быть сформулирована третья теорема теории подобия:

подобны те физические явления, условия однозначности которых подобны и определяющие критерии равны.

Теорема о количестве критериев уравнения (π -теорема). Бывает полезно проанализировать количество критериев, даваемых каким-либо уравнением. В соответствии с π -теоремой: *число инвариант подобия равно числу неизвестных величин уравнения за вычетом числа основных единиц.*

Некоторые выводы. Выше было установлено, что существуют особые величины — инварианты подобия, которые для всех подобных физических явлений сохраняют неизменное значение. Эти безразмерные величины составлены из разноименных физических величин и носят название критериев подобия.

Как мы видим, решение дифференциального уравнения физического процесса всегда может быть представлено в критериальной (безразмерной) форме. При этом была подчеркнута важность критериальной записи для постановки эксперимента.

Следует особо оговорить и другую, чисто аналитическую возможность, создаваемую записью решений в безразмерной форме. В самом деле, одно и то же значение критерия подобия может быть получено при разных значениях входящих в него величин. Это позволяет не только в опыте, но и аналитически исследовать широкий диапазон значений параметров, сравнительно умеренно изменяя величину соответствующего критерия.

Добавим в заключение, что изложенные здесь положения теории подобия даны в общем виде и без доказательств. Более подробные данные читатель может почерпнуть в специальной литературе [22].

Тепловое подобие процессов. Точно так же, как в § 5-2, были получены критерии гидродинамического подобия, критерии теплового подобия могут быть получены из уравнения теплопроводности, если учесть в нем движение охлаждающей среды (уравнение Фурье — Кирхгофа). Перечислим важнейшие из них:

$$\text{критерий Нуссельта } Nu = \frac{\alpha d}{\lambda},$$

$$\text{критерий Фурье } Fo = \frac{at}{d^2},$$

$$\text{критерий Пекле } Pe = \frac{wd}{a},$$

$$\text{критерий Био } Bi = \frac{\alpha d}{\lambda},$$

$$\text{критерий Прандтля } Pr = \frac{\nu}{a}.$$

В этих выражениях d — характерный геометрический размер, например гидравлический диаметр канала. Как очевидно, $Pe = \frac{wd}{\nu} \frac{\nu}{a} = Re Pr$.

Примером критериального уравнения может служить уравнение конвективного теплообмена Крауссольда, полученное экспериментально:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4},$$

из которого, в частности, следует, что коэффициент теплообмена α зависит от скорости движения среды в степени 0,8.

11-8. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл

Представим себе аварийный процесс возникновения электрической дуги между двумя витками обмотки или между обмоткой и корпусом электрической машины. Дуга возникает при нарушении качества или целостности изоляции, причем это явление можно считать достаточно распространенным в практике. Допустим далее, что соответствующая защита произвела отключение возникающего аварийного режима и дальнейший анализ объема повреждений призван определить объем ремонтных работ. В охарактеризованной ситуации необходимо в числе других получить ответы на такие вопросы: 1) каких значений достигла температура обмотки вблизи электрической дуги; 2) какой была длительность процесса повышения температуры выше допустимого уровня во всех точках обмотки.

Элементарные представления о процессе теплопроводности позволяют заключить, что тепловая энергия дуги, которая выделилась в течение весьма малого промежутка времени на весьма малом по длине участке обмотки, в связи с резким повышением температуры этого участка будет распространяться в обе стороны обмотки, повышая температуру смежных частей. Для точного ответа на вопросы о величине температуры в каждой точке обмотки и длительности процесса должно быть решено соответствующее дифференциальное уравнение.

Таким образом, рассмотрение обстоятельств распространения тепла вдоль обмотки в направлениях от источника тепла к свободным концам приводит нас к необходимости решить уравнение теплопроводности для следующих, несколько схематизированных условий: дан длинный, теплоизолированный по длине стержень, поперечные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с его длиной и начальная температура которого есть величина заданная; требуется определить функцию распространения теплового потока (температуры), считая, что заданная тепловая энергия выделилась в точке $x=x_0$ в момент времени $t=t_0=0$.

Решение поставленной задачи приводит к результату, имеющему важнейшее значение во всей теории теплопроводности. Оказывается, что частное решение этой задачи позволяет получить целый ряд других частных решений уравнения теплопро-

водности, к которым приводит постановка многих более сложных задач. Кроме того, попутно может быть проделан важный анализ физического смысла получаемых решений.

Итак, рассмотрим длинный теплопроводящий стержень с изолированной боковой поверхностью. При отсутствии источников тепла его температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (11-21)$$

Поскольку стержень весьма длинный, на процессы в его средней части основное влияние оказывает начальное распределение температуры. Влияние температурных условий на концах стержня практически не сказывается в течение большого промежутка времени. Таким образом, граничные условия отпадают, т. е. стержень может рассматриваться как бесконечно длинный, и к уравнению теплопроводности присоединяется лишь начальное условие

$$\vartheta_{t=0} = f(x). \quad (11-22)$$

Задача такого типа называется задачей Коши или задачей с начальным условием.

Введем вместо времени новую переменную по формуле $\tau = at$. Тогда

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = a \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau},$$

и уравнение (11-21) приобретает вид, не зависящий от физических свойств стержня:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (11-23)$$

причем по-прежнему $\vartheta_{\tau=0} = f(x)$, так как при $t=0$ и $\tau=0$.

Для решения уравнения применим метод разделения переменных и суперпозиции частных решений Фурье.*

Найдем вначале частные решения уравнения (11-23), представив их в виде произведения двух функций $X(x) \cdot T(\tau)$, каждая из которых зависит только от одной переменной. Подставим решение $\vartheta = X(x)T(\tau)$ в исходное уравнение (11-23). Получим

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

или

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

* Фурье впервые применил свой метод для получения решения задачи теплопроводности в замкнутом тонком кольце с охлаждаемой внешней поверхностью.

Так как левая часть последнего уравнения не зависит от x , а правая от τ , то обе части не могут зависеть ни от x , ни от τ и, следовательно, должны быть равны одной постоянной величине. Обозначая ее через c , приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$T'(\tau) - cT(\tau) = 0; \quad (11-24)$$

$$X''(x) - cX(x) = 0. \quad (11-25)$$

Первое из полученных уравнений (11-24) имеет общее решение

$$T(\tau) = Ce^{c\tau}.$$

Поскольку при стремлении времени процесса к бесконечности ($\tau \rightarrow \infty$) температура ни в одной точке стержня не может возрасти неограниченно, постоянная c должна быть отрицательной.

Обозначим $c = -k^2$, тогда

$$T(\tau) = Ce^{-k^2\tau}.$$

Отсюда уравнение (11-25) принимает вид:

$$X''(x) + k^2X(x) = 0.$$

Его общее решение

$$X(x) = M \cos(kx) + N \sin(kx).$$

Таким образом, частное решение уравнения (11-23) может быть теперь записано в виде:

$$\vartheta = X(x)T(\tau) = [CM \cos(kx) + CN \sin(kx)] e^{-k^2\tau}$$

или

$$\vartheta = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-k^2\tau}, \quad (11-26)$$

где $A = CM$ и $B = CN$, так как C , M , N , A и B — постоянные.

Поскольку k также произвольная постоянная, то функция (11-26) при любом фиксированном значении k является решением уравнения (11-23), причем каждому k могут соответствовать разные значения постоянных A и B , т. е. $A = A(k)$ и $B = B(k)$. Следовательно, семейство частных решений уравнения (11-23) должно быть записано в виде:

$$\vartheta_k(x, \tau) = [A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx)] e^{-k^2\tau}. \quad (11-27)$$

Перейдем теперь ко второй части метода Фурье — суперпозиции полученных частных решений $\vartheta_k(x, \tau)$. Так как уравнение (11-23) линейное и однородное и имеет, как это следует из (11-27), бесчисленное число частных решений, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра, то [5]

$$\vartheta(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx)] e^{-k^2\tau} dk. \quad (11-28)$$

Функции $A(k)$ и $B(k)$ пока неизвестны. Но если подобрать их так, чтобы решение (11-28) удовлетворяло начальному условию $\vartheta_{\tau=0} = f(x)$, то задачу можно будет считать решенной.

Следовательно, должно быть

$$\vartheta_{\tau=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx)] dk, \quad (11-29)$$

т. е. функцию $f(x)$ нужно разложить в интеграл Фурье. Для любой задачи теплопроводности интеграл Фурье существует и сходится, так как тепловая энергия стержня всегда конечна. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi.$$

Придадим теперь последнему разложению вид, удобный для сопоставления с (11-29):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(k\xi) d\xi \right] \cos(kx) + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(k\xi) d\xi \right] \sin(kx) \right\} dk.$$

Теперь сразу видно, что функции $A(k)$ и $B(k)$ должны определяться по формулам:

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(k\xi) d\xi;$$

$$B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(k\xi) d\xi.$$

Остается подставить значения этих функций в решение (11-28):

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos(kx) \cos(k\xi) + \sin(kx) \sin(k\xi)] e^{-k^2\tau} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[k(x - \xi)] e^{-k^2\tau} d\xi. \end{aligned}$$

Полученная функция удовлетворяет исходному уравнению (11-23) и начальному условию (11-22), т. е. решает поставленную задачу. Для физического истолкования этой функции путем простых преобразований ей можно придать несколько иной вид:

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\tau} \right] d\xi. \quad (11-30)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что полученное решение удовлетворяет исходному уравнению и начальным условиям. Иными словами, частное решение можно было бы анализировать как формально известное, опуская предыдущие преобразования по методу Фурье. Можно также видеть, что функция

$$\varphi_{\xi}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda at}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] \quad (11-30')$$

является решением уравнения (11-21) при любом ξ . Она зависит от времени процесса t , координаты x и произвольного параметра ξ . Эта функция называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Ее физиче-

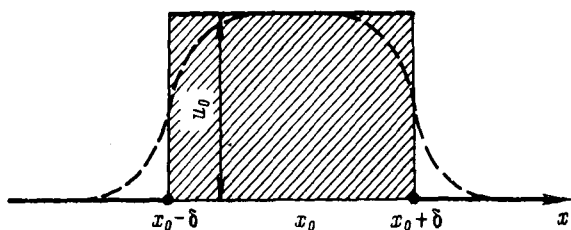


Рис. 11-6. Физический тепловой импульс

ское истолкование приводит к понятию физического теплового импульса.

Физическим тепловым импульсом называется распределение температуры, заданное следующим образом:

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} \vartheta_0, & \text{если } (x-x_0) < \delta \\ 0, & \text{если } (x-x_0) > \delta, \end{cases}$$

где ϑ_0 — постоянная и $\delta > 0$. Такое начальное распределение температуры возникает в том случае, когда в момент времени $t=0$ на участке стержня от $x_0 - \delta$ до $x_0 + \delta$ внезапно выделяется количество тепла Q_0 , повышающее температуру этого участка от нуля до ϑ_0 (рис. 11-6). Если S — площадь сечения стержня, то $2\delta S$ — объем рассматриваемого отрезка, $2\delta S\gamma$ — его вес. Тогда при удельной теплоемкости материала c количество тепла

$$Q_0 = 2\delta S\gamma c\vartheta_0. \quad (11-31)$$

Следует иметь в виду, что температура практически не может быть представлена разрывной функцией $f_{\delta}(x)$, но она будет тем ближе к этой функции, чем резче и кратковременнее подогрев. Непосредственно в точках $x_0 - \delta$ и $x_0 + \delta$ функция $f_{\delta}(x)$, как это следует из ее задания, не определена. Если представить ее интегралом Фурье, то его значение в этих точках будет равно $\vartheta_0/2$.

Поэтому можно считать, что и температура равна $\vartheta_0/2$ (штриховая линия на рис. 11-6 более точно соответствует практическому распределению начальной температуры).

Подставим теперь значение физического теплового импульса в качестве заданной функции начального распределения температуры в решение уравнения (11-30). Будем иметь:

$$\vartheta(x, t) = \frac{\vartheta_0}{2\sqrt{\pi at}} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi. \quad (11-32)$$

Учитывая малость промежутка интегрирования, для оценки величины полученного решения удобно применить теорему о среднем интегрального исчисления, выбрав внутри интеграла некоторую точку $\bar{\delta}$ так, что $(x_0 - \delta) < \bar{\delta} < (x_0 + \delta)$. По теореме о среднем

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi = 2\delta e^{-\frac{(x-\bar{\delta})^2}{4at}}.$$

Отсюда

$$\vartheta(x, t) = \frac{2\delta\vartheta_0}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{\delta})^2}{4at}\right] = \frac{Q_0}{S\gamma c} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{\delta})^2}{4at}\right].$$

Если для исключения физических параметров стержня принять конкретно, что подведенное количество тепла $Q_0 = S\gamma c$, решение для импульса примет вид:

$$\vartheta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{\delta})^2}{4at}\right]. \quad (11-33)$$

Теперь целесообразно рассмотреть абстракцию физического теплового импульса, устремляя δ к нулю. Получим идеальный или точечный тепловой импульс.

Поскольку мы выше приняли $Q_0 = S\gamma c$, т. е. в соответствии с (11-31) $2\delta\vartheta_0 = 1$, то при стремлении δ к нулю ϑ_0 будет стремиться к бесконечности. Тогда при $\vartheta_0 \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ имеем:

$$\vartheta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] = \varphi_{x_0}(x, t). \quad (11-34)$$

Таким образом, решение для точечного теплового импульса есть фундаментальное решение при значении параметра $\xi = x_0$.

Функция (11-34) и ее график находят применение в теории вероятностей. Кривые $\varphi_{x_0}(x, t)$ для разных значений $t > 0$ называются кривыми Гаусса. Они наглядно показывают, как распространяется тепло в стержне после точечного импульса (рис. 11-7). Максимум температуры достигается в точке приложения импульса $x = x_0$, он равен $1/2\sqrt{\pi at}$. В фиксированный момент времени температура обратно пропорциональна корню

квадратному из коэффициента температуропроводности $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$.

Смысл этого результата очевиден: в каждый момент времени максимальная температура тем меньше, чем больше коэффициент теплопроводности λ и чем меньше удельная теплоемкость $c\gamma$.

В фиксированных точках $x \neq x_0$ зависимость температуры от времени имеет вид кривых рис. 11-8. В каждой точке температура возрастет от нуля до некоторого максимального значения $\Theta(x)$, после чего начинает убывать, стремясь к нулю при стремлении времени к бесконечности.

При $t=0$ функция $\varphi_{x_0}(x, t)$ не определена. Чтобы убедиться, что она удовлетворяет начальному условию, необходимо, как это указывалось выше, найти ее предел при стремлении t к нулю:

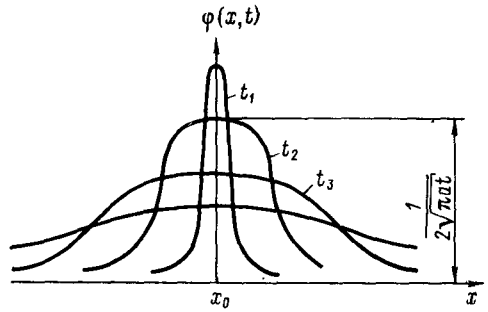


Рис. 11-7. Распространение тепла после импульса

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0}(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi at} \exp\left[\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right]} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4t\sqrt{\pi at} \exp\left[\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right]} = \frac{\sqrt{a}}{(x-x_0)^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t}}{\exp\left[\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right]} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, начальное условие удовлетворяется повсюду. Точка приложения импульса $x=x_0$ является особой. Для нее при $t \rightarrow 0$ начальная температура $\vartheta_0 \rightarrow \infty$. Максимальное значение $\vartheta(x)$ может быть определено, если производную функции $\varphi_{x_0}(x, t)$ по t приравнять нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{x_0}}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-x_0)^2}{4at^2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{4t\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right] \left[\frac{(x-x_0)^2}{2at} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$t_{\text{макс}} = \frac{(x - x_0)^2}{2a} \quad (11-35)$$

и

$$\Theta(x) = \vartheta_{x_0}(x, t_{\text{макс}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e(x - x_0)}}.$$

Следовательно, максимальная температура стержня в точке $x \neq x_0$ обратно пропорциональна расстоянию рассматриваемой точки от точки приложения импульса. Время, необходимое для достижения этой максимальной температуры, прямо пропорционально квадрату расстояния от точки приложения импульса.

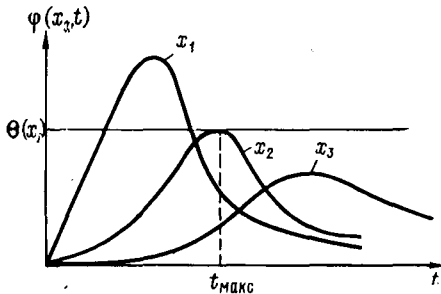


Рис. 11-8. Зависимость температуры от времени

Анализ фундаментального решения уравнения теплопроводности (11-30') позволяет дать наглядное физическое толкование решению (11-30) уравнения (11-21) для бесконечного стержня при начальном условии (11-22). Мы можем рассматривать решение (11-30) как *результат суперпозиции температур, возникающих в точке x в момент времени t вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов интенсивности f(ξ) в точке ξ, приложенных в момент времени t=0.*

11-9. Стержень, ограниченный с одной стороны

Решение (11-30) для бесконечного стержня, когда координата x задана на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, позволяет получить решение для полубесконечного стержня, который простирается в бесконечность в направлении положительной полуоси*.

Такому представлению соответствуют, например, стержни обмотки статора синхронной машины после отключения внутреннего короткого замыкания вблизи интенсивно охлаждаемых лобовых частей обмотки.

Уравнение теплопроводности для стержня, ограниченного с одной стороны, по-прежнему имеет вид $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$. Началь-

* Это означает, что на границе $x=0$ условия охлаждения стержня должны быть заданы.

ное условие также не изменяется: $\vartheta_{t=0} = f(x)$ для $x > 0$. К нему присоединяется одно граничное условие:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} [\vartheta_{x=0} - \vartheta_c]. \quad (11-36)$$

Рассмотрим два крайних случая граничного условия: $\alpha = 0$ (теплоизолированный торец) и $\alpha = \infty$ (постоянная температура на торце). Первый случай особенно легко проанализировать. К нему приводит представление о стержне, симметричном относительно среднего сечения. У такого стержня тепловой поток в среднем сечении равен нулю. Поэтому, если продолжить заданную функцию начального распределения температуры $f(x)$ на отрицательную полуось $x < 0$ четным образом: $f(-x) = f(x)$, решение (11-30) окажется справедливым. В этом можно убедиться и непосредственной проверкой (подстановкой).

Преобразуем решение (11-30) так, чтобы пределами интегрирования были концы полуоси, для которых задана функция $f(x)$. Получим:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} d\xi, \end{aligned}$$

так как принято, что функция $f(\xi)$ четная.

Если теперь обратиться к случаю, когда торец $x=0$ поддерживается при постоянной (нулевой) температуре [$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0$ ($\alpha = \infty$)], то искомое решение получим, продолжив функцию $f(x)$ на отрицательную полуось нечетным образом: $f(-x) = -f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \vartheta_0 - \vartheta_0 \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} d\xi. \end{aligned}$$

11-10. Теплопроводность в конечном стержне

Задача линейной теплопроводности в конечном стержне отличается от рассмотренных выше тем, что заданными являются граничные условия на двух торцевых сечениях стержня. Если длина стержня равна L , его торцевыми сечениями будут $x=0$

и $x=L$. При теплоизоляции боковой поверхности температура стержня в диапазоне значений $0 < x < L$ должна удовлетворять уравнению (11-21):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

начальному условию (11-22):

$$\vartheta_{t=0} = f(x)$$

и граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\alpha_0}{\lambda} (\vartheta_{x=0} - \vartheta_{c0}); \\ -\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \frac{\alpha_L}{\lambda} (\vartheta_{x=L} - \vartheta_{cL}). \end{aligned} \right\} \quad (11-37)$$

Поскольку граничные условия неоднородны, т. е. решение $\vartheta \equiv 0$ им не удовлетворяет, суперпозиция частных решений недопустима. Поэтому для применения метода Фурье необходимо вначале привести граничные условия к однородному виду.

Введем новую искомую функцию $w(x, t)$ по формуле:

$$\vartheta(x, t) = w(x, t) + \gamma + \gamma_1 x, \quad (11-38)$$

где γ и γ_1 — коэффициенты, подбираемые так, чтобы для функции w получились однородные краевые условия. Учитывая, что $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1$, получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\alpha_0}{\lambda} w_{x=0} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \gamma + \gamma_1 - \frac{\alpha_0}{\lambda} \vartheta_0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\alpha_L}{\lambda} w_{x=L} - \frac{\alpha_L}{\lambda} \gamma + \left(L \frac{\alpha_L}{\lambda} + 1 \right) \gamma_1 - \frac{\alpha_L}{\lambda} \vartheta_L.$$

Для однородности этих условий необходимо, чтобы

$$\frac{\alpha_0}{\lambda} \gamma - \gamma_1 = \frac{\alpha_0}{\lambda} \vartheta_0$$

и

$$\frac{\alpha_L}{\lambda} \gamma + \left(L \frac{\alpha_L}{\lambda} + 1 \right) \gamma_1 = \frac{\alpha_L}{\lambda} \vartheta_L.$$

Отсюда могут быть определены γ и γ_1 . Теперь для граничных условий функции w имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\alpha_0}{\lambda} w_{x=0}; \quad -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\alpha_L}{\lambda} \vartheta_L, \quad (11-39)$$

т. е. граничные условия однородны.

Начальные условия для ω должны быть определены из (11-38):

$$\omega_{t=0} = \vartheta_{t=0} - \gamma - \gamma_1 x = f(x) - \gamma - \gamma_1(x) = f_1(x). \quad (11-40)$$

Как очевидно, уравнение для ω не отличается от исходного (11-21).

Таким образом, к задаче для функции ω , подчиняющейся уравнению (11-21), однородным граничным условиям (11-39) и начальному условию (11-22), может быть применен метод разделения переменных и суперпозиции частных решений.

Разделение переменных в аналогично поставленной задаче было произведено в § 11-7. Частные решения имеют вид:

$$\omega(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-k^2 at}. \quad (11-41)$$

Особенность новой задачи состоит в том, что в отличие от предыдущей параметр k оказывается не произвольным, а подчиненным требованиям, которые диктуются граничными условиями.

Перепишем граничные условия (11-39) в форме $\lambda X'(0) = \alpha_0 X(0)$, $-\lambda X'(L) = \alpha_L X(L)$ и заменим функции X и X' их значениями из (11-41):

$$\lambda B k = \alpha_0 A;$$

$$\lambda A k \sin(kL) - \lambda B k \cos(kL) = \alpha_L A \cos(kL) + \alpha_L B \sin(kL).$$

Отсюда

$$\frac{A}{B} = \frac{\lambda}{\alpha_0} k$$

и

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_L \sin(kL) + \lambda k \cos(kL)}{\lambda k \sin(kL) - \alpha_L \cos(kL)} = \frac{\alpha_L \operatorname{tg}(kL) + \lambda k}{\lambda k \operatorname{tg}(kL) - \alpha_L}.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda}{\alpha_0} k = \frac{\alpha_L \operatorname{tg}(kL) + \lambda k}{\lambda k \operatorname{tg}(kL) - \alpha_L}$$

или

$$\operatorname{tg}(kL) = \frac{\lambda(\alpha_0 - \alpha_L)k}{\lambda^2 k^2 - \alpha_0 \alpha_L}. \quad (11-42)$$

Последнее выражение показывает, что параметр k при выполнении граничных условий (11-39) не является произвольным, а должен подчиняться трансцендентному уравнению (11-42).

Рассмотрим вначале только крайние случаи граничных условий $\alpha=0$ (теплоизолированные торцы) и $\alpha=\infty$ (постоянная температура на торцах).

$$\text{При } \alpha_0 = \alpha_L = 0 \quad \text{tg}(kL) = 0.$$

$$\text{При } \alpha_0 = \alpha_L = \infty \quad \text{tg}(kL) = \frac{\lambda k \left(\frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha_0} \right)}{\frac{\lambda^2 k^2}{\alpha_0 \alpha_L} - 1} = 0.$$

Таким образом, при симметричных граничных условиях на торцах параметр k должен быть корнем уравнения:

$$\text{tg}(kL) = 0. \quad (11-43)$$

Если условия на торцах несимметричны, например $\alpha_0=0$ и $\alpha_L=\infty$, то, как легко убедиться,

$$\text{ctg} kL = 0. \quad (11-44)$$

Для симметричных условий имеем $kL = n\pi$, где n — любое целое число.

Таким образом, k может принимать любое значение из бесконечной последовательности

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (11-45)$$

Для несимметричных условий на торцах

$$k = k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (11-46)$$

Числа k_n называются собственными числами задачи. Каждому собственному числу соответствуют свои коэффициенты A_n и B_n в частном решении (11-41). Иными словами, мы получили бесконечное множество частных решений задачи:

$$\omega_n(x, t) = [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)] e^{-k_n^2 a t}. \quad (11-47)$$

Функции $X(x)$ называются собственными функциями задачи.

Рассмотрим подробнее решения вначале для симметричных условий на торцах.

Имеем:

$$\omega_n(x, t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2}\right). \quad (11-48)$$

Если торцы теплоизолированы и

$$\left. \frac{\partial \omega_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

то $B_n = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, в случае теплоизолированных торцов

$$\omega_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{L^2}\right). \quad (11-49)$$

Если на торцах поддерживается постоянная температура и

$$\omega_{n, x=0} = 0; \quad \omega_{n, x=L} = 0,$$

то $A_n = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, для этого случая

$$\omega_n(x, t) = B_n \sin\left[\left(\frac{\pi n}{L} x\right)\right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{L^2}\right). \quad (11-50)$$

Для несимметричных условий на торцах

$$\omega_n(x, t) = \left[A_n \cos \frac{\pi(2n+1)}{2L} x + B_n \sin \frac{\pi(2n+1)}{2L} x \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{\pi^2(2n+1)^2 a t}{4L^2}\right)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \omega_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \omega_{n, x=L} = 0.$$

Отсюда $B_n = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, в этом случае

$$\omega_n(x, t) = A_n \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{2L} x\right] \exp\left(-\frac{\pi^2(2n+1)^2 a t}{4L^2}\right). \quad (11-51)$$

Решения (11-49), (11-50), (11-51) соответствуют однородному уравнению и однородным граничным условиям. Поэтому сумма ряда, составленного из этих решений, также удовлетворяет исходному уравнению и граничным условиям. Этот факт позволяет суммировать все частные решения (для каждого варианта задачи в отдельности) для получения соответствующего общего решения. Отличие от задачи для бесконечного стержня заключается в том, что в данном случае суммирование производится по собственным числам, т. е. составляется не интеграл частных решений по непрерывно изменяющемуся параметру, а сумма бесконечного ряда по дискретным значениям параметра.

Определим общие решения для рассматриваемых вариантов задачи. В случае теплоизолированных торцов (из 11-49) получим:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 a t}{L^2}\right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (11-52)$$

при начальном условии

$$\omega_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = f_1(x). \quad (11-52')$$

Отсюда для определения коэффициентов A_n нужно разложить функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье — ряд косинусов. Таким образом,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{L} \xi\right) d\xi. \quad (11-52'')$$

При постоянной температуре торцов из (11-50) получим:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 a t}{L^2}\right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (11-53)$$

при начальном условии

$$\omega_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = f_1(x). \quad (11-53')$$

Разлагая функцию $f_1(x)$ в ряд синусов, имеем:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) d\xi. \quad (11-53'')$$

При несимметричных условиях охлаждения из (11-51)

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left[-\frac{\pi^2 (2n+1)^2 a t}{4L^2}\right] \cos\left[\frac{\pi (2n+1)}{2L} x\right] \quad (11-54)$$

при начальном условии

$$\omega_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{\pi (2n+1)}{2L} x\right] = f_1(x), \quad (11-54')$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(\xi) \cos\left[\frac{\pi (2n+1)}{2L} \xi\right] d\xi. \quad (11-54'')$$

Подстановка коэффициентов A_n и B_n в выражения (11-52), (11-53) и (11-54) завершает решение всех трех вариантов задачи.

Рассмотрим в качестве простейшего примера начальное распределение температуры в теплоизолированном по длине и на торцах стержне, заданное функцией

$$f(x) = \begin{cases} \vartheta_0 & \text{при } 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

Весьма отдаленно такое распределение соответствует случаю возникновения симметричного короткого замыкания стержней обмотки статора синхронного генератора вслед за отключением несимметричного короткого замыкания и нагрузки (в этом случае торец нагретого стержня смыкается с торцом холодного, и в условиях снятой нагрузки происходит постепенное выравнивание температуры).

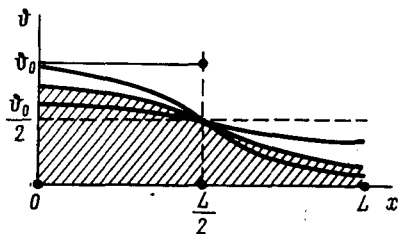


Рис. 11-9. Распределение температуры в стержне конечной длины

Обратимся к формуле (11-52'). Учитывая, что нулевой член разложения в ряд Фурье может быть принят равным $A_0/2$, где A_0 — значение коэффициента из (11-52'') при $n=0$, получим:

$$A_n = \frac{2\vartheta_0}{L} \int_0^{L/2} \cos\left(\frac{\pi n}{L} \xi\right) d\xi = \frac{2\vartheta_0}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \xi\right) \Big|_0^{L/2} =$$

$$= \frac{2\vartheta_0}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n=2m, m=1, 2, 3 \dots, \\ (-1)^m \frac{2\vartheta_0}{\pi(2m+1)} & \text{при } n=2m+1, m=0, 1, 2 \dots \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что ϑ и ω совпадают [см. (11-37) и (11-39)], получим

$$\omega = \vartheta = \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{2\vartheta_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos \frac{\pi(2m+1)}{L}}{2m+1} \exp\left[-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{L^2}\right].$$

При $x=L/2$ все косинусы равны нулю, откуда

$$\vartheta_{x=L/2} = \vartheta_0/2 \text{ для всех } t > 0.$$

График функции ϑ (рис. 11-9) симметричен относительно точки $(L/2, \vartheta_0/2)$. Отсюда для любого t

$$\int_0^L \vartheta dx = \frac{1}{2} \vartheta_0 L,$$

что означает неизменность тепловой энергии в стержне. При $t \rightarrow \infty$ главным членом ряда становится первый. Поэтому для больших t

$$\vartheta \approx \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{2\vartheta_0}{\pi} \exp\left[-\frac{\pi^2 at}{L^2}\right] \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right).$$

Следовательно, распределение температуры по длине стержня близко к косинусоидальному, по времени — к экспоненциальному.

Глава двенадцатая

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

12-1. Вводные замечания

В предыдущей главе был дан анализ уравнения теплопроводности и его фундаментального решения, которое позволяет трактовать распределение внутренних источников тепла как результат суперпозиции мгновенных источников, распределенных в поле в соответствии с законом выделения потерь (в пространстве и во времени).

Хотя подчеркивалось, что в случае электрических машин поле без внутренних источников является скорее исключением, чем правилом, в качестве простейшей иллюстрации методов решения уравнения теплопроводности была рассмотрена линейная задача для стержня, не содержащего источников тепла. Однако и на этом простейшем примере можно было проследить некоторые типические особенности распределения тепла в твердом теле в зависимости от условий охлаждения на его границах.

Можно было также видеть, что решение уравнения записывается в форме интеграла в задачах с начальным условием и в форме бесконечного ряда по собственным функциям в задачах с граничными условиями. Такая запись вполне позволяет анализировать физическую суть решения и определять численные значения температуры в заданном месте в заданный момент времени. В то же время нельзя считать, что указанная форма решения является достаточно простой и наглядной, чтобы служить, например, основой методики инженерного расчета конструкций.

Логически очевидно, что введение в рассмотрение внутренних источников тепла, в особенности в тех случаях, когда их интен-

сивность зависит от места и времени, усложняет как метод получения решения, так и форму самого решения. Больше того, в ряде случаев, которые нельзя назвать чрезмерно сложными, как, например, задача о цилиндрическом сердечнике статора, охлаждаемом с внутренней и наружной поверхностей и с торцов, решение может быть сформулировано лишь с привлечением столь специальных функций, что его интерпретация переходит в сферу чистого анализа.

В то же время исследователь теплообмена в электрических машинах не может уходить от сложностей теоретического изучения процесса, пусть даже постановка отдельных задач и схематизирует явления, происходящие в действительности. Как мы увидим в дальнейшем, достаточно строгие теоретические решения дают возможность физической трактовки теплообмена и, кроме того, содержат характеристические функции, которые смело могут быть положены в основу инженерных расчетов и экспериментальных исследований.

В охарактеризованной ситуации полезно различать признаки, по которым осуществляется выбор метода решения каждой конкретной задачи. Важнейшим из таких признаков является степень удаления от действительных условий при использовании аналитических решений, всегда основанных на системе сформулированных допущений. Может оказаться, что отклонения от реальности столь велики, что аналитические методы лишены каких бы то ни было преимуществ перед методами инженерными, например, методом использования эквивалентных тепловых схем.

Однако, чтобы прийти к такому заключению, необходимо владеть аппаратом и методологией строгого теоретического анализа соответствующих задач.

В классической литературе по теплопроводности неоднородным уравнениям отводится минимальное место. Причина тому не только в сложности их интегрирования, но и в сравнительно нешироком распространении во многих отраслях техники тел с внутренним тепловыделением.

В настоящей главе даны решения ряда задач, приводящих к неоднородному уравнению либо к неоднородным краевым условиям. Большинство из них получено впервые. Выбор задач был произведен исходя из особенностей теплообмена в типичных элементах конструкций электрических машин и, кроме того, с учетом необходимых ограничений сложности как методов, так и конечных результатов расчета.

Поскольку при рассмотрении задач преследуются не только утилитарные, но и методические цели, некоторые результаты получены разными способами, которые при этом даны с необходимыми пояснениями. Таким образом, материал главы вполне может быть усвоен читателем, незнакомым с приемами математической физики.

12-2. Линейная теплопроводность при несимметричных и симметричных граничных условиях (стационарная неоднородность)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{P_0(x)}{c\gamma} \quad (12-1)$$

при краевых условиях

$$\vartheta(x; 0) = \varphi(x); \quad \vartheta(0; t) = \vartheta_1; \quad \vartheta(L; t) = \vartheta_2. \quad (12-2)$$

Назовем стационарным решением функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению и граничным условиям вида:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P_0(x)}{c\gamma} = 0; \quad u(0) = \vartheta_1; \quad u(L) = \vartheta_2. \quad (12-3)$$

Пусть теперь функция $w(x, t)$ будет отклонением от стационарного решения и подчиняется уравнению и краевым условиям вида:

$$a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad w(0; t) = 0; \quad (12-4)$$

$$w(L; t) = 0; \quad w(x; 0) = \varphi(x) - u(x).$$

Тогда, как очевидно, сумма функций $u(x) + w(x, t)$ удовлетворяет исходному уравнению (12-1) и краевым условиям (12-2). В самом деле, имеем:

$$\vartheta(x, t) = u(x) + w(x, t),$$

откуда

$$\vartheta(x, 0) = u(x) + w(x, 0) = \varphi(x).$$

Следовательно, $w(x, 0) = \varphi(x) - u(x)$, что соответствует (12-4).

Определим стационарное решение для случая $P_0(x) = P_0 = \text{const}$. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{P_0}{\lambda}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P_0}{\lambda}x + C_1; \quad u(x) = -\frac{P_0}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2.$$

При $x=0$, $u_{x=0} = \vartheta_1$, т. е. $C_2 = \vartheta_1$. При $x=L$ $u_{x=L} = -\frac{P_0}{2\lambda}L^2 + C_1L + \vartheta_1$, т. е. $C_1 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{L} + \frac{P_0}{2\lambda}L$. Следовательно,

$$u(x) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{x}{L} + \frac{P_0}{2\lambda}x(L-x). \quad (12-5)$$

Ищем отклонение от стационарного решения (12-4).

Пусть $\tau = at$.

Тогда $\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ при $\omega(0, \tau) = 0$;

$$\omega(L; \tau) = 0; \quad \omega(x, 0) = \varphi(x) - u(x).$$

Разделим переменные. Определим, что $\omega(x, \tau) = X(x)T(\tau)$. Тогда $\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2$ или $T'(\tau) + k^2T(\tau) = 0$; $X''(x) + k^2X(x) = 0$.

Отсюда $T(\tau) = C \exp[-k^2(\tau)]$ и $X(x) = M \cos kx + N \sin kx$. Таким образом, $\omega(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) \exp(-k^2 at)$, где $A = CM$, $B = CN$. Подставим в полученное решение краевые условия $X(0) = 0$, получим $M = 0$; $X(L) = 0$, т. е. $N \sin kL = 0$. Отсюда $\sin kL = 0$ и $kL = \pi n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом,

$$\omega_n(x, t) = B_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right).$$

Следовательно, собственными функциями решенной однородной задачи, которая называется задачей Штурма — Лиувилля, являются

$$X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right).$$

Общим решением для $\omega(x, t)$ будет:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} at\right) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right). \quad (12-6)$$

Подставим в это решение начальное условие $\omega(x, 0) = \varphi(x) - u(x)$. Будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) = \varphi(x) - u(x).$$

Как известно, всякая конечная функция может быть представлена в форме бесконечного ряда по периодическим составляющим. В частности, функция $\varphi(x) - u(x)$, стоящая в последнем выражении справа, может быть разложена в ряд того же вида, что записанный слева (неполный ряд синусов Фурье). Коэффициенты B_n такого разложения:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [\varphi(x) - u(x)] \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx. \quad (12-7)$$

Заметим, что в задачах, в которых собственные функции включают только косинусы и функция начальных условий $\varphi(x)$

раскладывается в ряд косинусов, при этом коэффициенты ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)$ определяются выражением:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx.$$

что тождественно записи

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

Это означает, что при первом способе записи функции коэффициент A_0 должен определяться как A_n при $n=0$, причем $\psi(x)_{n=0} = A_0/2$.

Для определения коэффициентов B_n нужно вычислить интеграл (12-7). Подстановка (12-7) в (12-6) завершает решение для функции $w(x, t)$. Это означает, что окончательно для поставленной задачи имеем:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = u(x) + w(x, t) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{x}{L} + \frac{P_0}{2\lambda} x(L-x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{L} \int_0^L [\varphi(x) - u(x)] \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx \right\} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right). \end{aligned} \quad (12-8)$$

Рассмотрим частный случай симметричных граничных условий, т. е. случай, когда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$, причем примем $\varphi(x) = \varphi_0$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left\{ \varphi_0 - \left[\vartheta_0 + \frac{P_0}{2\lambda} x(L-x) \right] \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \\ = [1 - (-1)^n] \frac{2}{\pi n} \left[\varphi_0 - \vartheta_0 - \frac{P_0 L^2}{\pi^2 n^2 \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Так как при четных n $B_n = 0$,

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = \vartheta_0 + \frac{P_0 x}{2\lambda} (L-x) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \times \\ \times \left\{ \varphi_0 - \vartheta_0 - \frac{P_0}{\lambda} \left[\frac{L}{\pi(2m+1)} \right]^2 \right\} \sin\left[\frac{(2m+1)}{L} \pi x \right] \exp\left[-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{L^2} at \right]. \end{aligned} \quad (12-9)$$

Из (12-9) следует, что при $t \rightarrow \infty$ бесконечный ряд в решении стремится к нулю, т. е. само решение — к стационарному. Таким образом установившееся значение температуры в каждой точке определяется параболой (12-5), что очевидно и из физических соображений. При больших t ряд быстро убывает, так что можно рассматривать лишь первые несколько членов ряда. При $t \rightarrow 0$ решение стремится к φ_0 , что соответствует заданным начальным условиям для симметричной задачи.

12-3. Применение преобразования Лапласа

Операционные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными являются мощным инструментом исследования теплообмена. При этом, чем сложнее рассматриваемая краевая задача, тем больше оснований пользоваться для получения решений уравнения теплопроводности изображениями функций.

Проиллюстрируем применение преобразования Лапласа в начале на примере простой задачи, решенной в предыдущем параграфе. Впоследствии проанализируем некоторые более сложные задачи, прибегая к этому же преобразованию.

Сформулируем основные определения и правила метода изображений.

Изображением $F(s)$ функции $f(t)$ по Лапласу называется интеграл

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (12-10)$$

причем сама функция $f(t)$ называется оригиналом. Символически преобразованную функцию $F(s)$ часто обозначают как

$$L[f(t)].$$

Как легко увидеть, величина s обладает свойством оператора. Действительно, для изображения производной получаем

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned} \quad (12-11)$$

Таким образом, дифференцирование оригинала соответствует умножению изображения на s и вычитанию из результата постоянной величины $f(0)$. Это означает, что операция дифференцирования заменяется алгебраическим действием над изображением.

Для производной второго порядка получаем:

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (12-12)$$

Применяя понятие изображения к интегралу оригинала, получим

$$L \left[\int_0^t f(\xi) d(\xi) \right] = \frac{1}{s} F(s), \quad (12-13)$$

т. е. интегрирование оригинала функции $f(t)$ соответствует делению изображения на величину s .

Основными правилами при операциях с изображениями являются следующие [24].

1. Теорема подобия: умножение аргумента оригинала (изображения) на некоторое число приводит к делению аргумента изображения (оригинала) и одновременно самого изображения (оригинала) на то же число, т. е. изменению изображения (оригинала) по законам подобия:

$$\left. \begin{aligned} L \left[f(at) \right] &= \frac{1}{a} F \left(\frac{s}{a} \right); \\ L \left[\frac{1}{a} f \left(\frac{t}{a} \right) \right] &= F(as). \end{aligned} \right\} \quad (12-14)$$

2. Теорема смещения: замена переменной s в изображении функции на $(s-a)$ соответствует умножению оригинала функции на величину e^{at} :

$$L \left[e^{at} f(t) \right] = F(s-a). \quad (12-15)$$

3. Теорема свертывания: изображение произведения оригиналов соответствует произведению изображений сомножителей:

$$L [f_1(t) f_2(t)] = F_1(s) F_2(s). \quad (12-16)$$

4. Правило применения преобразования Лапласа к уравнению с частными производными: преобразованию подлежит лишь одна переменная уравнения (обычно время, которое меняется в задачах как раз в диапазоне $0 \rightarrow \infty$), другая независимая переменная остается неизменной:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} &= s\Theta(x, s) - \vartheta(x, 0); \\ L \left[\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} \right] &= \frac{\partial \Theta(x, s)}{\partial x}; \\ L \left[\frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} \right] &= \frac{\partial^2 \Theta(x, s)}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12-17)$$

Таким образом, в результате применения преобразования Лапласа к уравнению с частными производными, частные производные по t устраняются и в изображающем уравнении остаются только частные производные по координате. Это означает, что изображающее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое автоматически входит начальное условие. Следовательно, к этому уравнению следует

присовокупить лишь граничные условия (разумеется, в преобразованном виде), и решение для изображения может быть записано.

Для перехода к оригиналу функции необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа, которое осуществляется комплексным интегралом [24].

Практически, однако, пользуются таблицами преобразованных функций [24], представляя полученное изображение в виде табличных величин.

Поясним сказанное на примере задачи (12-1) с краевыми условиями (12-2), в случае когда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ и $\varphi(x) = \varphi_0$.

Заменяя по-прежнему t на τ/a , получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{P_0}{\lambda}.$$

Применим к последнему уравнению преобразование Лапласа. Будем иметь:

$$L \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = - \frac{P_0}{\lambda} \right], \quad \text{т. е. } \Theta'' - s\Theta + \vartheta(x, 0) = - \frac{P_0}{\lambda s},$$

где учтено, что

$$L[A] = \int_0^{\infty} A e^{-s\tau} d\tau = - \frac{A}{s} e^{-s\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s}.$$

Таким образом, для изображения функции имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Theta'' - s\Theta = - \frac{P_0}{\lambda s} - \varphi_0,$$

решением которого является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения:

$$\Theta(x, s) = \left(+ \frac{P_0}{s^2 \lambda} + \frac{\varphi_0}{s} \right) + C_1 \operatorname{ch} \sqrt{s} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{s} x,$$

или после подстановки граничных условий:

$$\Theta(x, s) = \left(- \frac{P_0}{s^2 \lambda} - \frac{\varphi_0}{s} + \frac{\vartheta_0}{s} \right) \left[\frac{\operatorname{ch} \sqrt{s}(l/2 - x)}{\operatorname{ch} \sqrt{s} l/2} - 1 \right] + \frac{\vartheta_0}{s}.$$

Как можно видеть, изображение искомой функции представлено в виде суммы произведений табличных величин, что

позволяет перейти к оригиналам. Получим:

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0 + \frac{P_0 x}{2\lambda}(L-x) + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\varphi_0 - \vartheta_0 - \frac{P_0 L^2}{\lambda \pi^2 (2m+1)^2} \right] \frac{1}{2m+1} \times \\ \times \sin \left[\frac{(2m+1)\pi}{L} x \right] \exp \left[-\frac{\pi^2 (2m+1)^2 at}{L^2} \right],$$

что тождественно решению (12-9).

На рис. 12-1 представлена номограмма решения задачи линейной теплопроводности с фиксированными разными температурами на границах.

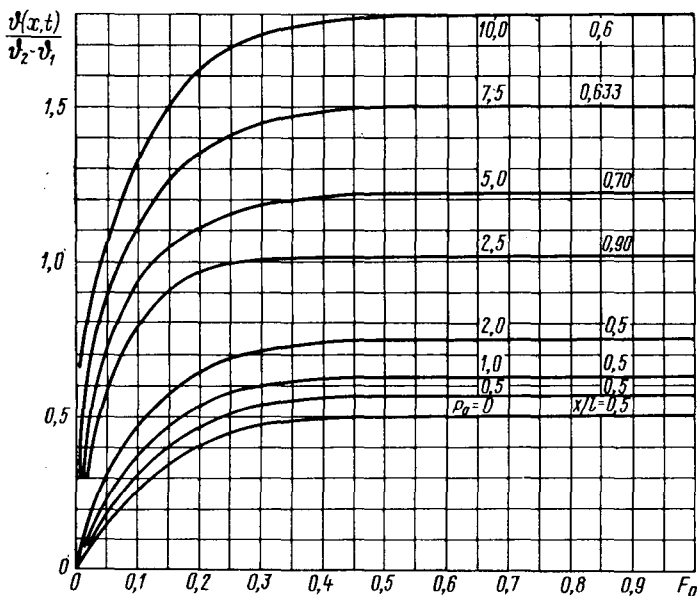


Рис. 12-1. Распределение температуры для разных сечений пластины и разных удельных нагрузок

турами на границах. Как видно из рисунка, при заданных значениях тепловыделения [критерий Померанцева $Po = \frac{P_0 L^2}{\lambda(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$] установившаяся температура достигается при определенных значениях критерия Фурье. Кривые построены для сечений пластины, имеющих максимальную температуру. На рис. 12-2 показан характер прогрева пластины при фиксированном значении тепловыделения. Рис. 12-3 показывает распределение температуры в установившемся режиме при различных значениях тепловыделения. Как видно, с ростом тепловыделения максимум температуры смещается к середине пластины.

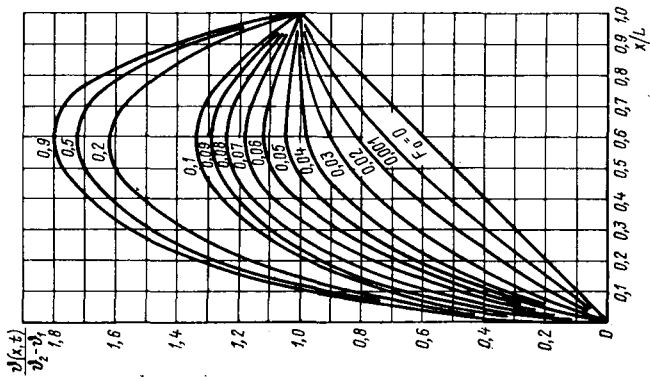


Рис. 12-2. Распределение температуры в зависимости от времени при неизменной нагрузке ($P_0=10$)

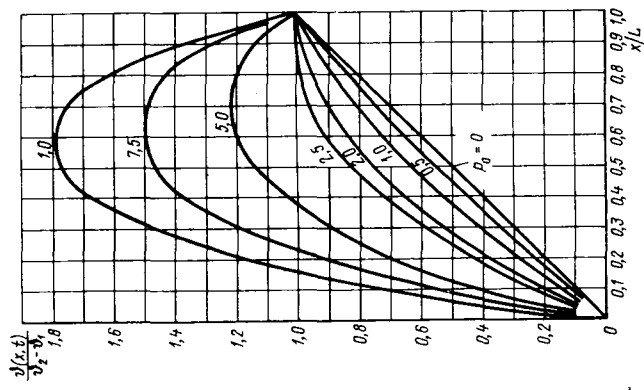


Рис. 12-3. Зависимость установившейся температуры от нагрузки

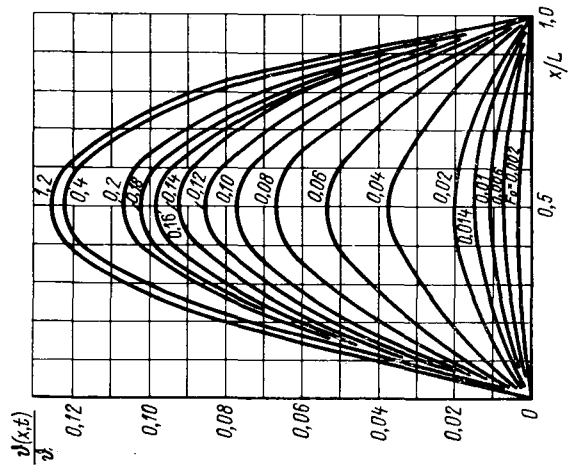


Рис. 12-4. Зависимость температуры от времени при симметричных граничных условиях

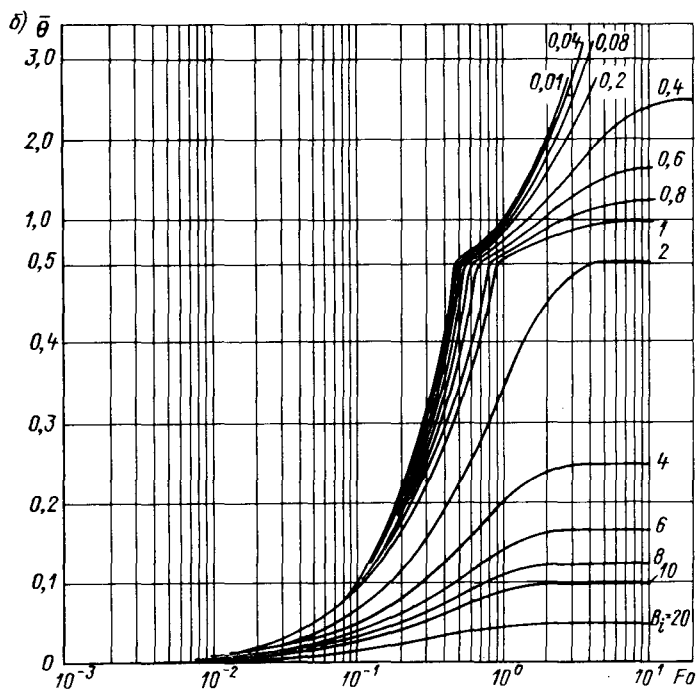
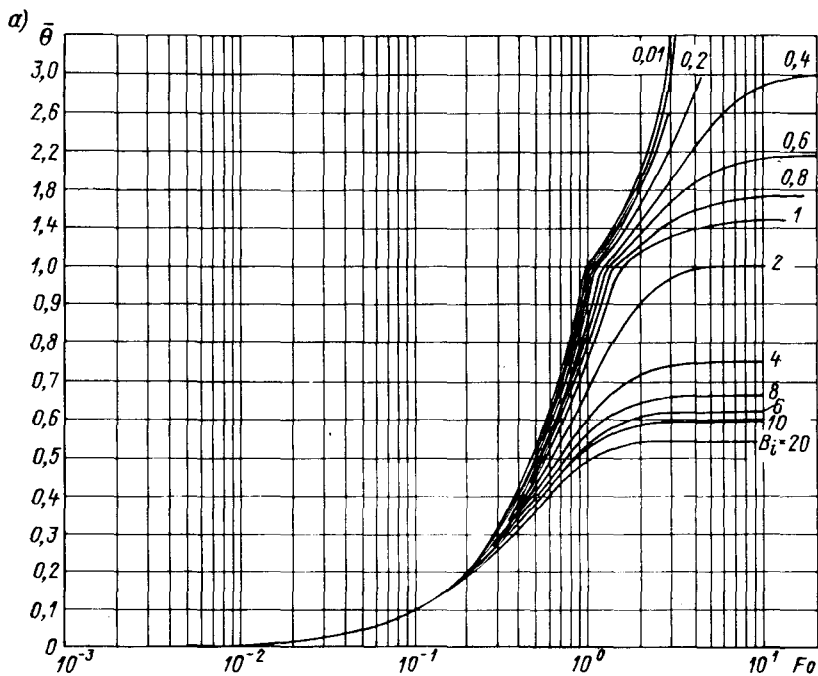


Рис. 12-5. Распределение температуры при заданных условиях охлаждения на границах

В случае симметричных граничных условий максимум температуры всегда находится в центре пластины (рис. 12-4).

Представляет интерес решение задачи линейной теплопроводности для случая граничных условий третьего рода: $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$,

$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=L} + h\vartheta_{x=L} = 0$. Решение имеет вид:

$$\bar{\Theta} = \frac{\vartheta \lambda}{P_0 L^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \cos \left(\gamma_n \frac{x}{L} \right)}{(2\gamma_n + \sin 2\gamma_n) \gamma_n^2} [1 - \exp(-\gamma_n^2 F_0)],$$

где γ_n — корни уравнения $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\gamma}{\text{Bi}}$; $\text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda}$.

На рис. 12-5 даны номограммы температуры Θ в зависимости от F_0 и Bi для центра пластины (а) и для края пластины (б).

Особым случаем линейной задачи, существенным для анализа нестационарных процессов в обмотках электрических машин, является учет теплоемкости смежных тел (рис. 12-6).

Рассматривается изменение температуры по толщине и во времени для слоя изоляции толщиной L , которая прилегает к медным проводникам обмотки толщиной δ , выделяющей на поверхности потери $P_s = P_0 \delta$, вт/м^2 . Теплоемкость меди c_M , удельный вес поверхностного слоя $\gamma_{Ms} = \gamma_M \delta$.

Тепло, выделяющееся в обмотке, частично повышает ее теплосодержание, частично передается через поверхность соприкосновения в изоляцию и изменяет температуру изоляции. Таким образом, в уравнении процесса (для изоляции) тепловыделение отсутствует, и в формулировке граничных условий должна быть учтена часть тепла, ушедшая на подогрев меди (граничные условия второго рода):

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2};$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = P_s - c_M \gamma_{Ms} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{x=0}; \quad \vartheta \Big|_{x=L} = 0.$$

При $\tau = \frac{\lambda t}{c\gamma}$ получим $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$;

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = P_s - \frac{c_M \gamma_{Ms} \lambda}{c\gamma} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}.$$

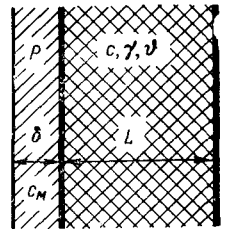


Рис. 12-6. К расчету теплопроводности на границе меди и изоляции обмотки

Решение имеет вид:

$$\bar{\Theta} = \frac{\vartheta \lambda}{P_s L} = 1 - \frac{x}{L} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n \sin \left[\beta_n \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right]}{\beta_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_n}{2\beta_n} \right)} e^{-\beta_n^2 Fo},$$

где β_n — корни уравнения $\operatorname{tg} \beta = \frac{c\gamma L}{c_m \gamma_{ms} \beta} = \frac{M}{\beta}$.

Номограмма зависимости температуры Θ от Fo и M приведена на рис. 12-7. Как видно из рисунка, в связи с тем, что на внешней границе изоляции температура зафиксирована (напри-

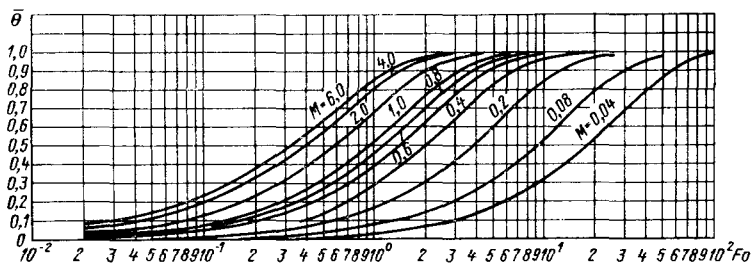


Рис. 12-7. Зависимость максимальной температуры от времени и относительной теплоемкости M

мер, равна температуре активной стали), процесс стремится к установившемуся. Изменение во времени имеет экспоненциальный характер, который в полулогарифмических координатах номограммы имеет несколько своеобразное изображение.

12-4. Линейная теплопроводность для случая, когда интенсивность источников тепла зависит от времени (нестационарная неоднородность)

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (12-18)$$

при краевых условиях:

$$\vartheta(x, 0) = \varphi(x); \quad \vartheta(0, t) = 0; \quad \vartheta(L, t) = 0. \quad (12-19)$$

Представим общее решение $\vartheta(x, t)$ в виде суммы решения $v(x, t)$ соответствующего однородного уравнения с заданными

начальными условиями и решения $u(x, t)$ неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad v(x, 0) = \varphi(x); \quad v(0, t) = 0; \quad v(L, t) = 0; \quad (12-20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t); \quad u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0.$$

(12-21)

Для задачи (12-20) в соответствии с (11-53) и (11-53'')

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \sin \frac{\pi n x}{L};$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx.$$

Решение для $u(x, t)$ будем искать в форме ряда по собственным функциям, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad (12-22)$$

t считаем параметром.

Для определения неизвестной функции $u_n(t)$ представим заданную функцию $f(x, t)$ в виде ряда:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx.$$

Таким образом, коэффициент ряда, определяемый интегрированием по x , будет иметь разные значения для разных моментов времени t (при каждом значении n).

Подставим решение (12-22) в исходное уравнение (12-21). Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a u_n(t) + u_n'(t) - f_n(t) \right] = 0.$$

Последнее уравнение удовлетворяется, если все члены разложения равны нулю:

$$u'_n(t) + a \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 u_n(t) - f_n(t) = 0. \quad (12-23)$$

Используем начальное условие для $u(x, t)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right).$$

Отсюда $u_n(0) = 0$, что служит начальным условием для уравнения (12-23). Линейное дифференциальное уравнение (12-23) имеет интегрирующий множитель. Решение уравнения имеет вид:

$$u_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 at} \int e^{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 at} f_n(t) dt + C.$$

Заменяя неопределенный интеграл определенным, получим:

$$u_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 at} \int_0^t e^{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a\tau} f_n(\tau) d\tau.$$

Таким образом,

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (12-24)$$

Функции (12-24) полезно придать форму, позволяющую получить физическую интерпретацию. Из (12-22), (12-21) и (12-24) получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \exp \left[-\left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 a(t-\tau) \right] f_n(\tau) d\tau \right\} \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left\{ \exp \left[-\left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 a(t-\tau) \right] \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi, \tau) \sin \left(\frac{\pi n \xi}{L} \right) d\xi \right\} \times \\ &\quad \times \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) d\tau = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \int_0^t \exp \left[-\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a(t-\tau) \right] \times \\ &\quad \times \int_0^L f(\xi, \tau) \sin \left(\frac{\pi n \xi}{L} \right) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (12-25)$$

Последнее выражение при суммировании с функцией $v(x, t)$ завершает решение задачи.

Для пояснения чрезвычайно важного физического смысла функций (12-24) и решения (12-25) учтем следующие соображения.

Интегральная комбинация $\int_0^t u(t-\tau) f(\tau) d\tau$, называемая сверткой функций u и f , представляет суммарный эффект действия факторов u и f в течение промежутка времени $t-\tau$. Понимать это следует так. Если в течение времени, длящегося от $\tau=0$ до $\tau=t$, действуют факторы $f(\tau)$, то их суммарный эффект равен $\int_0^t f(\tau) d\tau$. Но если каждому фактору приписать весовой коэффициент u , зависящий от промежутка времени между моментом τ возникновения фактора и моментом наблюдения t , то суммарный эффект определится функцией (12-24).

Таким образом, функция $\vartheta(x, t)$ в форме (12-25) есть интегральное представление вида:

$$\vartheta(x, t) = \int_0^L \int_0^t \Theta(x, \xi, t-\tau) f(\xi\tau) d\xi d\tau,$$

которое определяет действие распределенных (во времени и пространстве) источников как суперпозицию сосредоточенных мгновенных источников, интенсивность которых задана зависимостью от положения начальной точки пространства $(x-\xi)$ и начального момента времени $(t-\tau)$.

Рассмотрим в качестве примера линейную зависимость потерь от времени и координаты:

$$f(x, t) = bx + ct. \quad (12-26)$$

Такое распределение особенно легко представить практически.

Например, обмотка с водяным охлаждением в режиме стационарной нагрузки имеет температуру, линейно возрастающую при удалении от входа воды в канал. При внезапной перегрузке по току можно считать характер распределения по длине неизменным. Что же касается потерь, то, как известно, они линейно зависят от абсолютной температуры проводника, т. е. в рассматриваемом случае — от времени.

Примем для простоты иллюстрации задачи $\varphi(x) = \vartheta_0 = \text{const}$. Тогда будем иметь:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\vartheta_0}{\pi n} [1 - (-1)^n] \exp \left[-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 at \right] \sin \left(\frac{\pi nx}{L}\right),$$

(12-27)

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) (-1)^{n+1} \frac{L^3}{a\pi^3 n^3} \left\{ Lb \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \right] + \right. \\ \left. + c \left[1 - (-1)^n \right] \left\{ t - \frac{L^2}{a\pi^2 n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \right] \right\} \right\}. \quad (12-28)$$

Как можно видеть, при $t=0$ $u(x, t)=0$. При $b=0$ и $c=0$ также $u(x, t)=0$. При $b=0$

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) (-1)^{n+1} \frac{L^3 c}{a\pi^3 n^3} \left[1 - (-1)^n \right] \times \\ \times \left\{ t - \frac{L^2}{a\pi^2 n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \right] \right\}.$$

При $c=0$

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) (-1)^{n+1} \frac{bL^4}{a\pi^3 n^3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at\right) \right].$$

Применим теперь к задаче (12-18), (12-19) при условии (12-26) преобразование Лапласа. Запишем исходное уравнение в форме:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + kx + m\tau, \quad (12-29)$$

где $\tau = at$, $m = c/a^2$, $k = \frac{b}{a}$. Получим:

$$L_{\tau}[\vartheta] = \frac{\partial^2 \Theta(x, s)}{\partial x^2} - s\Theta(x, s) + \frac{kx}{s} + \frac{m}{s^2} + \varphi_0 = 0,$$

т. е.

$$\Theta'' - s\Theta + \frac{kx}{s} + \varphi_0 + \frac{m}{s^2} = 0.$$

Отсюда

$$\Theta(x, s) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{s} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{s} x + \frac{k}{s^2} x + \frac{m}{s^3} + \frac{\varphi_0}{s}.$$

или

$$\Theta(x, s) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{s} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{s} (L-x) + \frac{kx}{s^2} + \frac{m}{s^3} + \frac{\varphi_0}{s}.$$

Подставим граничные условия:

$$\Theta_{x=0} = 0; \quad C_2 = -\frac{\frac{m}{s^3} + \frac{\varphi_0}{s}}{\operatorname{sh} \sqrt{s} L};$$

$$\Theta_{x=L} = 0; \quad C_1 = -\frac{\frac{kL}{s^2} + \frac{m}{s^3} + \frac{\varphi_0}{s}}{\operatorname{sh} \sqrt{s} L}.$$

Следовательно,

$$\Theta(x, s) = \frac{kL \operatorname{sh} \sqrt{s} x}{s^2 \operatorname{sh} \sqrt{s} L} - \frac{m \operatorname{sh} \sqrt{s} x}{s^3 \operatorname{sh} \sqrt{s} L} - \frac{\varphi_0 \operatorname{sh} \sqrt{s} x}{s \operatorname{sh} \sqrt{s} L} - \frac{m \operatorname{sh} \sqrt{s} (L-x)}{s^3 \operatorname{sh} \sqrt{s} L} - \frac{\varphi_0 \operatorname{sh} \sqrt{s} (L-x)}{s \operatorname{sh} \sqrt{s} L} + \frac{kx}{s^2} + \frac{m}{s^3} + \frac{\varphi_0}{s}.$$

Как очевидно, все члены последнего уравнения представляют собой комбинацию табличных величин [24].

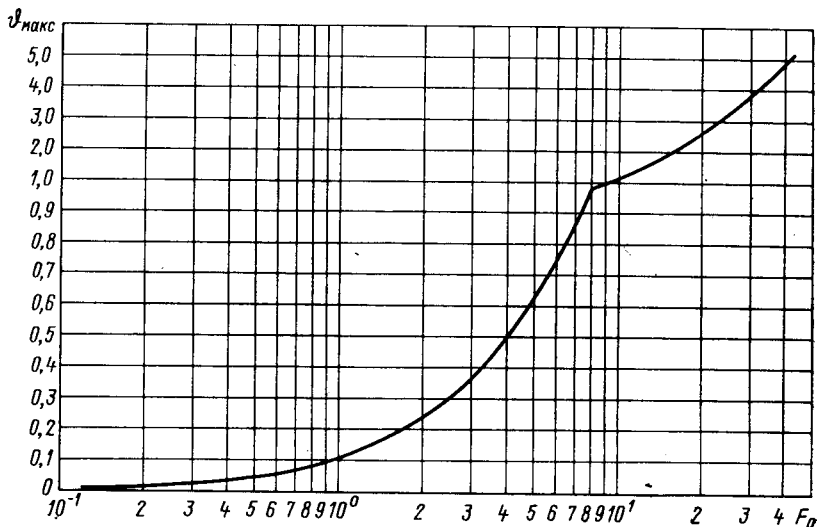


Рис. 12-8. Зависимость максимальной температуры от времени

Таким образом, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = & \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) L^3 \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at \right)}{\pi^3 n^3} + \\ & + \frac{c}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4L^4 \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n+1)x \right] \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} at \right]}{\pi^5 (2n+1)^5} + \\ & + \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \sin \frac{(2n+1) \pi x}{L} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} at \right]}{\pi (2n+1)} + \\ & + \frac{c}{a^2} \left[\frac{\left(\frac{L}{2} \right)^4 - \left(x - \frac{L}{2} \right)^4}{4!} + x(L-x) \left(\frac{at}{2!} - \frac{L^2}{16} \right) \right] + \frac{kL^3}{3!} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} \right). \end{aligned} \quad (12-30)$$

Приведем результаты расчета максимальной температуры [сечение $x=L$ в зависимости от времени (рис. 12-8)]. Как можно видеть, температура возрастает неограниченно.

Сопоставление функций (12-27), (12-28) и (12-30), в разной форме представляющих единственное решение задачи (12-18), (12-19), позволяет заключить, что операционный метод расчета приводит в конечном итоге к более наглядному разложению на сумму простейших рядов, которые сравнительно легко поддаются анализу.

12-5. Применение метода Г. А. Гринберга

Метод Гринберга [18] решения дифференциальных уравнений с частными производными во многих случаях позволяет весьма лаконичным путем приходиться к завершению сложных задач, причем форма решения оказывается достаточно простой.

Проиллюстрируем метод на примере задачи (12-29), решенной в предыдущем параграфе. Его суть сводится к следующему.

Для соответствующей однородной задачи определяются собственные числа k_n и собственные функции X_n (т. е. решается задача Штурма — Лиувилля). В нашем случае, как было получено выше путем разделения переменных [см. (12-6)], $X_n = \sin \frac{\pi n x}{L}$.

Заметим, что собственные функции всякой физической задачи удовлетворяют условиям ортогональности в рассматриваемом интервале [5], т. е.

$$\int_0^L r X_n X_m dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N \{X_n\} & m = n, \end{cases}$$

где r — вес ортогональности, $N \{X_n\}$ — норма функции.

Запишем теперь искомое решение в форме:

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) X_n, \quad (12-31)$$

где

$$B_n(\tau) = \frac{\int_0^L r X_n(x) \vartheta(x, \tau) dx}{N \{X_n\}} = \frac{A_n(\tau)}{N_n}.$$

Интеграл $A_n(\tau)$ называется трансформантой.

Следующим шагом решения является преобразование исходного уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты путем

умножения обеих частей на r и X_n и интегрирования по x в исследуемом интервале. В нашем случае

$$r = 1; N\{X_n\} = N_n = \frac{L}{2}; B_n(\tau) = \frac{2}{L} \int_0^L \vartheta(x, \tau) X_n dx.$$

Для упрощения дальнейших выкладок подставим последнее выражение в (12-31), получим:

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) X_n; A_n(\tau) = \int_0^L \vartheta(x, \tau) X_n(x) dx. \quad (12-31')$$

Умножение обеих частей (12-29) на $X_n(x)$ и интегрирование от 0 до L дает:

$$\int_0^L \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial \tau} X_n dx = \int_0^L \frac{\partial^2 \vartheta(x, \tau)}{\partial x^2} X_n dx + k \int_0^L x X_n(x) dx + m\tau \int_0^L X_n dx.$$

Как можно увидеть при изменении порядка интегрирования и дифференцирования, в левой части последнего уравнения записана производная $A'_n(\tau)$. После вычисления интегралов в правой части (первый из них интегрируется по частям, причем второй член полученного разложения вновь интегрируется по частям) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для A_n :

$$A'_n + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} A_n = (-1)^{n+1} k \frac{L^2}{\pi n} + [1 - (-1)^n] \frac{mL\tau}{\pi n}.$$

Это линейное уравнение с неоднородностью, зависящей от параметра. Его общее решение, как легко убедиться, имеет вид:

$$A_n = Ce^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} \tau} + k(-1)^{n+1} \frac{L^4}{\pi^3 n^3} + \frac{L^3 m}{\pi^3 n^3} [1 - (-1)^n] \left[\tau - \frac{L^2}{\pi^2 n^2} \right]. \quad (12-32)$$

Подставим начальное условие $\vartheta(x, 0) = \vartheta_0$ в выражение (12-31') для трансформанты $A_n(\tau)$. Получим $A_n(0) = \int_0^L \vartheta_0 X_n dx = \frac{\vartheta_0 L}{\pi n} [1 - (-1)^n]$. Это значение может быть подставлено в решение (12-32):

$$\vartheta_0 \frac{L}{\pi n} [1 - (-1)^n] = C + (-1)^{n+1} \frac{kL^4}{\pi^3 n^3} - \frac{mL^5}{\pi^5 n^5} [1 - (-1)^n].$$

Отсюда

$$\boxed{C = \vartheta_0 \frac{L}{\pi n} [1 - (-1)^n] + (-1)^n \frac{kL^4}{\pi^3 n^3} + m \frac{L^5}{\pi^5 n^5} [1 - (-1)^n].}$$

Следовательно, в соответствии с (12-31)

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = \frac{2}{L} & \left\{ \frac{b}{a} \frac{L^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{n^3} + \right. \\ & + \frac{c^2}{a^2} \frac{2L^3}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[at - \frac{L^2}{\pi^2 (2m+1)^2} \right] \sin \left(\frac{2m+1}{L} \pi x \right)}{(2m+1)^3} + \\ & + \frac{2\vartheta_0 L}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{2m+1}{L} \pi x \right)}{2m+1} \exp \left[-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{L^2} at \right] + \\ & + \frac{b}{a} \frac{L^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{n^3} \exp \left[-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} at \right] + \\ & \left. + \frac{cL^5}{a^2 \pi^5} 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{2m+1}{L} \pi x \right)}{(2m+1)^5} \exp \left[-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{L^2} at \right] \right\} \end{aligned}$$

или в безразмерном виде при $\vartheta_0 = 0$;

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} = \frac{\vartheta}{kL^3} = 2 & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[(2m-1) \frac{\pi x}{L} \right] \frac{1 - \exp \left[-\pi^2 (2m-1)^2 Fo \right]}{[\pi (2m-1)]^3} + \\ & + 4 \frac{c}{ab} L \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \left[(2m-1) \frac{\pi x}{L} \right]}{[\pi (2m-1)]^5} \cdot \\ & + \exp \left[-(2m-1)^2 \pi^2 Fo \right] - 1, \end{aligned}$$

где $F_0 = \tau/L^2$.

Как можно видеть, полученное решение тождественно (12-27), (12-28).

12-6. Двумерное стационарное распределение температуры

Рассмотрим прямоугольный брус, охлаждаемый с поверхности (рис. 12-9). Пусть в каждом сечении бруса условия выделения потерь и условия охлаждения неизменны. Тогда тепловой поток вдоль оси Oz , перпендикулярной плоскостям сечений (и плоскости чертежа), отсутствует. Будем считать также, что

условия охлаждения с поверхности b тождественны условиям охлаждения с поверхности b' . Примем аналогичное утверждение для поверхностей a и a' . Тогда оси Ox и Oy будут линиями симметрии, и поле температуры достаточно определить для заштрихованной на рисунке зоны.

В стационарном режиме уравнение теплопроводности для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = -\frac{P_0}{\lambda}. \quad (12-33)$$

Пусть на поверхности охлаждения осуществляется путем теплообмена по закону Ньютона. Тогда с учетом симметрии и обозначения $\alpha/\lambda = h$ крайевые условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + h\vartheta \Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + h\vartheta \Big|_{y=b} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-34)$$

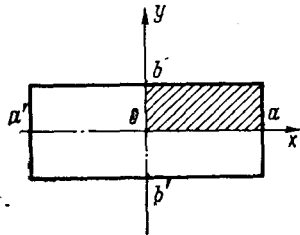


Рис. 12-9. К расчету охлаждаемого с поверхности бруса

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$\vartheta(x, y) = u(x) + v(x, y), \quad (12-35)$$

для которых

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{P_0}{\lambda}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + hu \Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12-36)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} + hv \Big|_{y=b} = -hu(x); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial x} + hv \Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-37)$$

Тогда интегрированием получаем

$$u(x) = \frac{P_0 a^2}{2\lambda} \left[\frac{2}{ha} + 1 - \frac{x^2}{a^2} \right]. \quad (12-38)$$

Для нахождения функции $v(x, y)$ разделим переменные. Будем иметь:

$$v(x, y) = X(x)Y(y); \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2. \quad (12-39)$$

Отсюда

$$x'' + k^2 X = 0; \quad X(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

и, учитывая, что

$$\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + hX \Big|_{x=a} = 0,$$

получим

$$B = 0; \quad \operatorname{tg} ka = \frac{h}{k}. \quad (12-40)$$

Обозначим $ka = \gamma$ и заметим, что γ_n есть корни трансцендентного уравнения (12-40) при $n=1, 2, 3 \dots$. Тогда собственные функции X_n запишутся в виде $X_n = \cos k_n x = \cos \gamma_n \frac{x}{a}$. Из уравнения $Y'' - k^2 Y = 0$ получим $Y_n = \operatorname{ch} k_n y = \operatorname{ch} \gamma_n \frac{y}{a}$. Следовательно,

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \operatorname{ch} \gamma_n \frac{y}{a} \cos \gamma_n \frac{x}{a}. \quad (12-41)$$

Подставим в (12-41) граничное условие $\frac{\partial v}{\partial y} + hv|_{y=b} = -hu(x)$. Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \left(\frac{\gamma_n}{a} \operatorname{sh} \gamma_n \frac{b}{a} + h \operatorname{ch} \gamma_n \frac{b}{a} \right) \cos \gamma_n \frac{x}{a} = -hu(x).$$

Обозначим произведение $M_n \left(\frac{\gamma_n}{a} \operatorname{sh} \gamma_n \frac{b}{a} + h \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right)$ через A_n . Тогда, разлагая функцию $-hu(x)$ в ряд по собственным функциям задачи, получим

$$A_n = \frac{\int_0^a (-hu(x)) \cos \gamma_n \frac{x}{a} dx}{\int_0^a \cos^2 \gamma_n \frac{x}{a} dx},$$

где в знаменателе записана норма функции N_n . Интегрирование дает:

$$N_n = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right]; \quad A_n = -2 \frac{P_0 a}{\lambda} \frac{ah \sin \gamma_n}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right]}.$$

Отсюда

$$M_n = -\frac{2P_0 a^2}{\lambda} h \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right]} \frac{1}{\frac{\gamma_n}{a} \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) + h \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right)}.$$

Таким образом, для $\vartheta(x, y)$ имеем:

$$\vartheta(x, y) = \frac{P_0 a^2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{ha} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \right. \\ \left. - 2ah \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{y}{a} \right) \cos \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n^3 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left[\gamma_n \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) + ha \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) \right]} \right\}$$

или в безразмерном виде:

$$\bar{\Theta} = \frac{\vartheta \lambda}{P_0 a^2} = \frac{1}{\operatorname{Bi}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \\ - 2 \operatorname{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{y}{a} \right) \cos \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin (2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right] \left[\gamma_n \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) + \operatorname{Bi} \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) \right]},$$

где γ_n — корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{Bi}}{\gamma}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Применим к этой же задаче метод Гринберга:

$$\vartheta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x); \quad C_n(y) = \frac{\int_0^a \vartheta(x, y) X_n(x) dx}{N \{X_n\}}.$$

Умножение (12-33) на X_n и интегрирование от 0 до a по x дает уравнение относительно трансформанты T_n :

$$\frac{d^2 T_n}{dy^2} - k_n^2 T_n = - \frac{P_0}{\lambda} \frac{a}{\gamma_n} \sin \gamma_n,$$

откуда

$$T_n = C \operatorname{ch} k_n y + D \operatorname{sh} k_n y + \frac{P_0}{k_n^2 \lambda} \frac{a}{\gamma_n} \sin \gamma_n$$

и с учетом преобразованных граничных условий (12-34)

$$C = \frac{- \frac{P_0}{\lambda} ha^3 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n^3}}{\frac{\gamma_n}{a} \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) + h \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right)}.$$

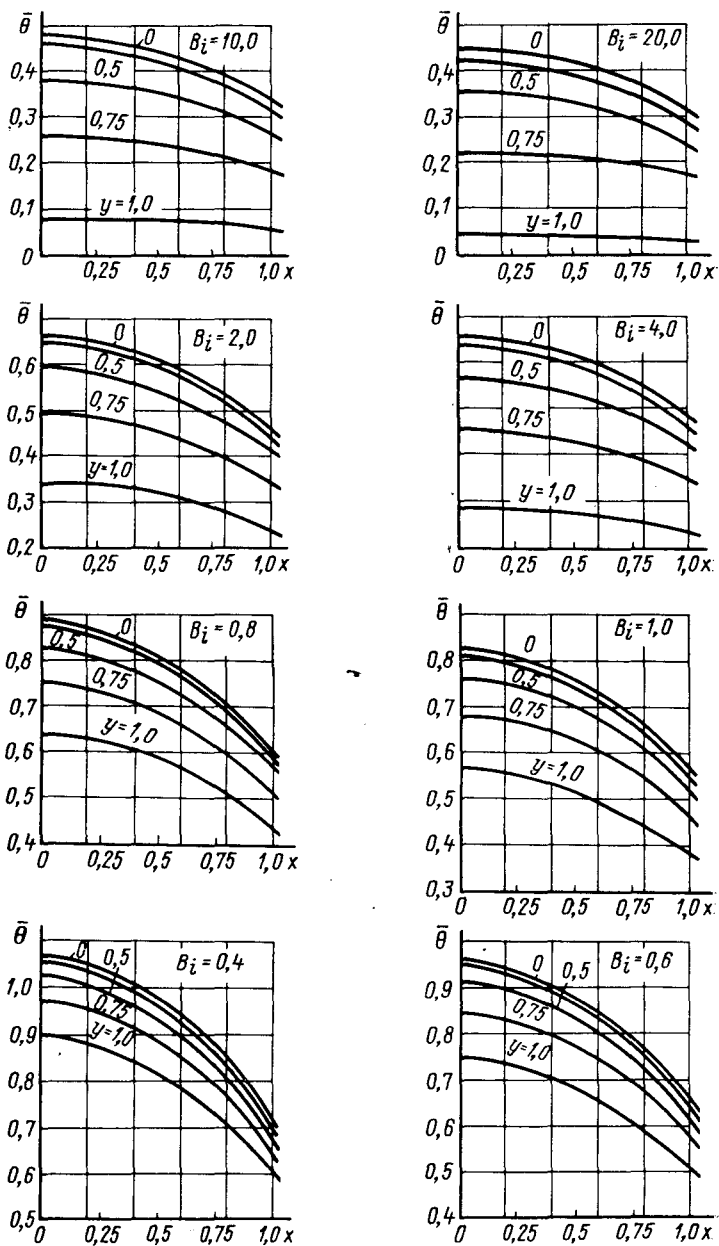


Рис. 12-10. Распределение температуры в двумерном стационарном поле для случая граничных условий третьего рода

Отсюда

$$\bar{\Theta}(x, y) = \frac{\vartheta \lambda}{P_0 a^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right)}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right]} - 2 \text{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \operatorname{ch}\left(\gamma_n \frac{y}{a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right)}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \left[\gamma_n \operatorname{sh}\left(\gamma_n \frac{b}{a}\right) + \text{Bi} \operatorname{ch}\left(\gamma_n \frac{b}{a}\right)\right]}$$

Как очевидно, первая сумма представляет разложение функции $\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ по собственным функциям задачи. Таким образом, оба решения, полученные разными методами, тождественны.

На рис. 12-10 приведены результаты расчета безразмерной температуры бруса квадратного сечения для разных значений критерия Bi_y на одной грани и при $\text{Bi}_y = 1,0$ на другой грани.

12-7. Тело цилиндрической формы

Рассмотрим полый цилиндр, охлаждаемый на внутренней поверхности и по торцам (рис. 12-11). Среднее по высоте сечение такого цилиндра является плоскостью симметрии, так что тепловой поток вдоль оси Oz в этой плоскости отсутствует. Отсюда уравнение теплопроводности и граничные условия для рассматриваемой стационарной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} &= -\frac{P_0}{\lambda}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0; \\ -\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + h\vartheta \Big|_{r=a} &= 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + h\vartheta \Big|_{z=L} = 0. \end{aligned} \quad (12-42)$$

Решение записывается в форме $\vartheta(r, z) = u(r) + v(r, z)$, причем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{P_0}{\lambda}; \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0; \quad -\frac{\partial u}{\partial r} + hu \Big|_{r=a} = 0; \quad (12-43)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0; \\ -\frac{\partial v}{\partial r} + hv \Big|_{r=a} &= 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + hv \Big|_{z=L} = -hu(r). \end{aligned} \right\}$$

$$(12-44)$$

Задача (12-43) решается прямым интегрированием:

$$u(r) = \frac{P_0}{2\lambda} \left[b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2 - a^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{ah} \right].$$

Тогда в задаче (12-44) разделим переменные: $v(r; z) = R(r)Z(z)$;

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -k^2.$$

Отсюда $(rR')' + k^2 rR = 0$ при $\frac{dR}{dr} \Big|_{r=b} = 0$; $-\frac{dR}{dr} + hR \Big|_{r=a} = 0$.

Решение последнего уравнения (Бесселя) ищем в таком виде, чтобы были удовлетворены граничные условия. В отличие от многих физических задач о цилиндрах с непрерывным полем, начинающимся на оси, в случае полого цилиндра второе частное решение уравнения Бесселя не исключается и общее решение записывается в виде:

$$R(r) = Y_1(kb) J_0(kr) - J_1(kb) Y_0(kr), \quad (12-45)$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка; Y_0, Y_1 — функции Неймана нулевого и первого порядка.

Подстановка решения (12-45) в формулировку граничного условия $r=a$ дает:

$$-R'(a) + hR(a) = 0. \quad (12-45')$$

Получили уравнение для собственных чисел задачи kb , которые обозначим γ :

$$\begin{aligned} - \left[Y_1(\gamma) J_1\left(\gamma \frac{a}{b}\right) \right] \frac{\gamma}{b} + \left[J_1(\gamma) Y_1\left(\gamma \frac{a}{b}\right) \right] \frac{\gamma}{b} + \\ + h \left[Y_1(\gamma) J_0\left(\gamma \frac{a}{b}\right) - J_1(\gamma) Y_0\left(\gamma \frac{a}{b}\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет бесконечное число положительных корней $\gamma = \gamma_n$, где $n=1, 2, 3, \dots$. Чтобы определить корни, необходимо применять специальные методы решения, например метод приближений. Далее имеем:

$$Z'' - k^2 Z = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$$

откуда

$$Z_n = C \operatorname{ch} k_n z.$$

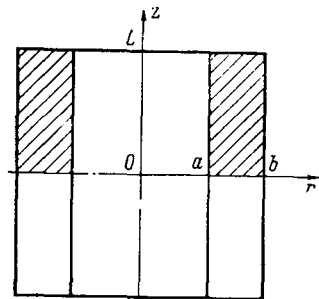


Рис. 12-11. К расчету охлаждаемого с внутренней поверхности полого цилиндра

Следовательно,

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{z}{b} \right) R_{\gamma_n}(r);$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + hv \Big|_{z=b} = -hu(r).$$

Отсюда

$$-hu(r) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \left[\frac{\gamma_n}{b} \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right) + h \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right) \right] R_{\gamma_n}(r).$$

Обозначим произведение M_n на двучлен в скобках через A_n . Разложение функции $-hu(r)$ в ряд по собственным функциям задачи дает:

$$A_n = \frac{\int_a^b [-hu(r)] r R_{\gamma_n}(r) dr}{\int_a^b r R_{\gamma_n}^2(r) dr} = \frac{\Phi_n}{N_n}.$$

Цилиндрическая функция R_{γ_n} в данном случае имеет ортогональность с весом r . Интегрирование дает:

$$\Phi_n = -\frac{P_0 h^2 a b^4}{\lambda \gamma_n^4} R_{\gamma_n}(a);$$

$$N_n = \frac{2b^2}{\pi^2 \gamma_n^2} - \frac{a^2}{2} R_n^2(a) \left(1 + \frac{h^2 b^2}{\gamma_n^2} \right).$$

Отсюда

$$M_n = \frac{-P_0 h^2 a}{\lambda} \left(\frac{b}{\gamma_n} \right)^4 \frac{1}{N_n} \frac{R_{\gamma_n}}{\frac{\gamma_n}{b} \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right) + h \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right)}.$$

Суммирование $u(r)$ и $v(r, z)$ завершает решение задачи:

$$\vartheta(r, z) = \frac{P_0}{2\lambda} \left\{ \left[b^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r^2 - a^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{ah} \right] - \right.$$

$$\left. - 2h^2 a b^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{\gamma_n}(a) \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{z}{b} \right) R_{\gamma_n}(r)}{\left[\frac{\gamma_n}{b} \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right) + h \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{L}{b} \right) \right] \gamma_n^4 N_n} \right\},$$

где $R_{\gamma_n}(r)$ определяется из (12-45) при $kb = \gamma_n$.

12-8. Двумерная нестационарная теплопроводность

Рассмотрим уравнение (рис. 12-9):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} - \frac{P_0}{\lambda}; \quad \tau = \frac{\lambda t}{c\gamma}$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + h\vartheta \Big|_{x=a} = 0; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + h\vartheta \Big|_{y=b} = 0; \quad \vartheta \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}$$

Будем решать задачу, применяя вначале преобразование Лапласа. Получим:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = s\Theta - \frac{P_0}{\lambda s}. \quad (12-46)$$

Таким образом, производная по времени исключена. Применим теперь метод Гринберга для решения полученного уравнения с частными производными относительно изображения Θ .

Задача Штурма—Лиувилля может быть сформулирована следующим образом (см. § 12-6):

$$X'' + k^2 X = 0; \quad X'(0) = 0; \quad X'(a) + hX(a) = 0.$$

Следовательно, $X_n = \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right)$, где γ_n — корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{Bi}}{\gamma}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Преобразование уравнения дает:

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_n^2}{a^2} \Theta_n + \frac{d^2 \Theta_n}{dy^2} &= s\Theta_n - \frac{P_0}{\lambda s} \frac{a}{\gamma_n} \sin \gamma_n; \\ \frac{d\Theta_n}{dy} \Big|_{y=0} &= 0; \quad \frac{d\Theta_n}{dy} + h\Theta_n \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Theta_n &= C \operatorname{ch} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} y \right) + \frac{\frac{P_0}{\lambda} \frac{a}{\gamma_n} \sin \gamma_n}{s \left(s + \frac{\gamma_n^2}{a^2} \right)}; \\ C &= \frac{-\frac{P_0 a}{\lambda} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \frac{h}{s \left(s + \frac{\gamma_n^2}{a^2} \right)}}{\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} b \right) + h \operatorname{ch} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} b \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_0 a}{\lambda} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \frac{1}{s \left(s + \frac{\gamma_n^2}{a^2} \right)} \times \right. \\ \times \left[1 - \frac{h \operatorname{ch} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} y \right)}{\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} b \right) + h \operatorname{ch} \left(\sqrt{s + \frac{\gamma_n^2}{a^2}} b \right)} \right] \times \\ \times \frac{2 \cos \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{a \left[1 + \frac{\sin (2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right]} \right\}.$$

Для определения оригинала в данном случае необходимо применить обратное преобразование, определяемое комплексным интегралом. Тогда окончательное решение задачи будет иметь вид:

$$\bar{\Theta} = \frac{\vartheta(x, y, t) \lambda}{P_0 a^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \cos \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n^3 \left[1 + \frac{\sin (2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right]} \times \\ \times \left[1 - \frac{\operatorname{Bi} \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{y}{a} \right)}{\gamma_n \operatorname{sh} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right) + \operatorname{Bi} \operatorname{ch} \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right)} \right] - \\ - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \cos \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right) \sin \beta_m \cos \left(\beta_m \frac{y}{b} \right)}{\gamma_n \beta_m \left[1 + \frac{\sin (2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right] \left[1 + \frac{\sin (2\beta_m)}{2\beta_m} \right] \left[\gamma_n^2 + \frac{a^2}{b^2} \beta_m^2 \right]} \times \\ \times e^{-\left(\gamma_n^2 + \frac{a^2}{b^2} \beta_m^2 \right) Fo},$$

где $Fo = \frac{\tau}{a^2}$; β — корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \times$
 $\times \frac{\operatorname{Bi}}{\beta}$; $\operatorname{Bi} = ah$.

На рис. 12-12 приведены результаты расчета максимальной безразмерной температуры в зависимости от времени и условий теплообмена на границах ($b/a = 1$; $Bi_x = 1$, $Bi_y = 1$; 2).

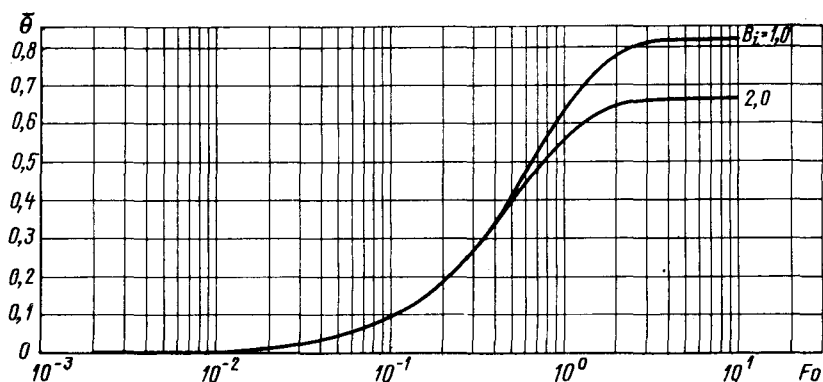


Рис. 12-12. Распределение температуры в зависимости от времени и условий теплообмена на границе

Глава тринадцатая

ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН В СТАЦИОНАРНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМАХ НАГРУЗКИ

13-1. Вводные замечания

Многочисленные теоретические разработки, применяемый математический аппарат и большое число экспериментальных исследований позволяют, вообще говоря, производить тепловой расчет с большой точностью. В то же время желаемый результат не всегда может быть достигнут. Главной причиной снижения точности теплового расчета является некоторая неопределенность исходных данных, которая всегда сопутствует проектным разработкам.

В задачи теплового расчета входит определение средней температуры активных частей машины, определение максимальных значений температуры в зависимости от параметров режима нагрузки, вычисление тепловых потоков между смежными элементами конструкции, т. е. расчет поля температуры в машине.

Исходными данными служат: распределение потерь энергии по объему машины, значения физических констант, в первую очередь теплопроводности и теплоемкости, и условия охлаждения на граничных поверхностях. Можно считать, что физические константы применяемых материалов известны достаточно

хорошо. По-иному обстоит дело с определением местных потерь, которые выделяются в обмотках, активной стали и некоторых конструктивных элементах. Достоверность их задания ограничивается возможностями электромагнитного расчета машины, который во многих случаях базируется на упрощенных представлениях. Аналогичным образом ограничена точность задания граничных условий. Значения коэффициентов теплообмена существенно зависят от скорости и режима движения охлаждающих сред. Это означает, что в тепловой расчет неизбежно вносятся все неточности вентиляционного и гидравлического расчетов.

Сказанное не означает, что применение методов решения уравнения теплопроводности, которые обеспечивают высокую точность расчета температуры при принятых исходных данных, нецелесообразно. Однако всегда необходимо количественно оценивать диапазон изменения заданных величин, чтобы располагать объективными критериями целесообразности применяемого метода расчета. Неразумно прибегать к громоздким формулам и трудоемким вычислениям в тех случаях, когда это не может способствовать повышению достоверности конечных результатов расчета.

Принято считать, что точность метода расчета и вычислений должны превосходить точность задания исходных величин не более чем на два порядка. При этом точность оценивается величиной ошибки, выраженной в процентах.

13-2. Температура и превышение температуры в элементах конструкции электрической машины

Требования, которые предъявляются к термическим характеристикам электрических машин, имеют специфический характер. Здесь существенной является не только температура машины в целом или температура ее частей, но и разность значений температуры отдельных элементов конструкции, в том числе разность температур охлаждающей среды и обмоток. Указанная особенность связана с условиями работы и долговечностью изоляционных материалов.

Повышение температуры машины при включении ее под нагрузку отражается на состоянии изоляции обмоток и стали в первую очередь.

Под влиянием термических воздействий и связанных с ними механических усилий изоляционные материалы ухудшают свои свойства и с течением времени изнашиваются, или, как говорят, стареют. Результатом износа является утрата изолирующих свойств и в конечном итоге — тепловой или электрический пробой изоляции. При этом срок службы изоляции,* т. е.

* Время безаварийной работы при номинальной нагрузке.

один из важнейших ее параметров, зависит не только от абсолютной температуры эксплуатации, но и от величины превышения температуры активных частей машины над температурой охлаждающей среды.

Отрицательное влияние повышенной абсолютной температуры на износостойкость изоляционных материалов изучено сравнительно хорошо. Многочисленные эксперименты и опыт эксплуатации показывают, что для каждого класса изоляционных материалов существует определенный уровень температуры, превышение которого всего лишь на несколько градусов приводит к существенному сокращению срока службы. Здесь играет роль также длительность воздействия повышенной температуры.

Для некоторых классов изоляционных материалов действителен степенной закон старения, так называемое правило Монцингера, установленное экспериментально. В соответствии с этим правилом при повышении температуры эксплуатации на определенное число градусов $\Delta\theta$ срок службы изоляционных материалов сокращается вдвое по отношению к сроку службы при исходной температуре:

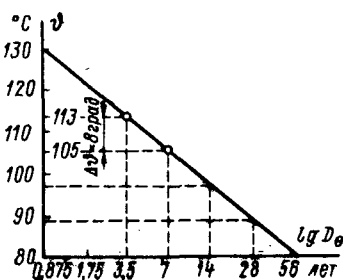


Рис. 13-1. Зависимость срока службы изоляции от температуры

$$D_{\theta} = D_{\vartheta} 2^{\frac{\vartheta - \theta}{\Delta\theta}}, \text{ лет,} \quad (13-1)$$

где D_{θ} — срок службы при увеличенной температуре θ ; D_{ϑ} — срок службы при температуре ϑ , определяемый опытным путем (например, 7 лет при $\vartheta = 105^{\circ}\text{C}$ для изоляционных материалов класса А); $\Delta\theta$ — постоянная величина приращения температуры, сокращающая срок службы вдвое.

Значения $\Delta\theta$ не могут быть названы точно, если невелик объем экспериментальных данных. Для изоляционных материалов класса А обычно принимают $\Delta\theta = 8$ град. Термореактивная изоляция (класса В) повысила это значение до $\Delta\theta = 10$ град.

Логарифмический характер (рис. 13-1) зависимости (13-1) диктует жесткие правила эксплуатации электрических машин, в особенности дорогостоящего энергетического и уникального силового оборудования. Становится также понятной необходимость достоверных результатов теплового расчета машин на стадии их проектирования. В частности, выясняется важность определения местных значений температуры в машине, которые называют иногда пиковыми температурами. Именно пиковые температуры определяют практический срок службы машины. С этой точки зрения качество конструкции тем выше, чем меньше отношение пиковой температуры к средней, т. е. чем целесообразнее использован активный объем машины.

Формула (13-1) позволяет определять неиспользованный ресурс срока службы изоляции. Если, например, срок службы при исходной проектной температуре должен составлять 10 лет (100% ресурса) и если машина проработала при увеличенной на $\Delta\theta$, град, температуре (т. е. при ресурсе 5 лет) один год, (т. е. 20% ресурса), то при снижении температуры до нормальной машина сможет безаварийно работать еще 80% проектного ресурсного времени, т. е. еще 8 лет.

Разумеется, правило Монцингера является приближенным, но оно позволяет верно построить экономическую оценку конструкций электрических машин и режимов их эксплуатации.

По действующим в нашей стране стандартам нормальным сроком окупаемости машины считается период, равный семи годам непрерывной эксплуатации.

Таким образом, влияние абсолютной температуры на долговечность изоляции в подавляющем большинстве случаев может быть достаточно надежно оценено с количественной стороны.

Несколько хуже обстоит дело с оценкой влияния разности температур изоляции и охлаждающей среды. Перепад температуры на толщине корпусной изоляции, т. е. разница температур меди обмотки и активной стали, определяет смещение обмотки в пазах за счет относительного теплового расширения меди. Поскольку температура активной стали прямо зависит от температуры охлаждающей среды, можно считать, что разность температур среды и обмотки достаточно определенно характеризует перемещение обмоток, или, как его называют, м и г р а ц и ю.

Миграция обмоток тем больше разрушает изоляцию, чем чаще она происходит в процессе эксплуатации машины и чем больше величина относительного смещения в пазах.

Если принять коэффициент линейного расширения меди равным $16 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹, то на каждый метр активной длины машины относительное смещение при перепаде температуры на изоляции 65 град составит 1 мм.

Следует учесть также, что температура эксплуатации машины всегда превосходит температуру ее изготовления в цехе. По этой причине в связи с различием коэффициентов линейного расширения меди и стали при нагружении машины происходит дополнительное смещение обмоток в пазах. При разнице коэффициентов примерно $5 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹ дополнительное смещение на каждый метр активной длины равно приблизительно 0,4 мм (здесь принято, что повышение температуры при включении машины составляет 80 град).

Ответ на вопрос о допустимых величинах миграции обмоток для того или иного вида изоляции может дать только статистика. Принято считать, что в машинах с активной длиной более четырех метров, т. е. турбогенераторах и т. п., перепад на изоляции не должен быть больше 50—70°С. Такое требование

отражается на способах задания допустимой температуры эксплуатации машин применительно к различным классам изоляционных материалов в стандартах и нормах всех стран.

В стандартах и нормах учитывается, что при изменении климатических условий (наступление холодной зимы) возможны такие обстоятельства, когда за счет весьма низкой температуры природной воды может быть значительно снижена температура охлаждающей среды (например, водорода или воздуха). Благодаря этому снизится также абсолютная температура обмоток по сравнению с летним периодом. Естественно, в охарактеризованных условиях проявляется тенденция увеличить мощность машины, доводя абсолютную температуру обмоток до летнего уровня. Однако при этом разность температур обмотки и среды может оказаться недопустимо большой. Исходя из этого в нормах и стандартах ограничивается диапазон температуры охлаждающей среды и диапазон превышений температуры изоляции. При этом, разумеется, оказывается заданной и абсолютная температура обмоток, но она уже является величиной переменной — функцией температуры охлаждающей среды.

Приведенные рассуждения позволяют сделать также вывод о целесообразности эксплуатации электрической машины при стабильной температуре. Всякие колебания температуры приносят вред изоляции обмоток и неблагоприятно отражаются на сроке службы машины в целом. Следовательно, всегда нужно стремиться сводить к нет изменения температуры, вызываемые изменением нагрузки и климатических условий. Так, например, в зимнее время путем автоматического регулирования (в контурах рециркуляции) целесообразно поддерживать температуру технической (природной) воды на неизменном по сравнению с летним периодом уровне.

Вообще, рациональная температура эксплуатации активных частей электрической машины при заданной ее конструкции и мощности может быть достигнута путем рационального охлаждения машины. Это позволяет сформулировать задачи, стоящие перед проектировщиком системы охлаждения машины:

главным целевым назначением организации охлаждения электрических машин является создание таких условий теплообмена с охлаждающей средой, при которых температура и превышение температуры активных частей машины над температурой охлаждающей среды не превосходят пределов, установленных нормами.

13-3. Обзор методов теплового расчета

Выше было показано (гл. 12), что поле температуры электрической машины описывается неоднородными дифференциальными уравнениями. Их решения в тех случаях, когда указанные уравнения достаточно надежно характеризуют тепловое состоя-

ние отдельных элементов конструкции и тепловую связь между этими элементами, естественно было бы считать основой теплового расчета машин.

В то же время предыдущий анализ продемонстрировал по крайней мере два существенных обстоятельства: 1) решения дифференциальных уравнений приводят к сложным и громоздким формулам и 2) эти решения, как и сами уравнения, настолько схематизируют реальный процесс теплообмена в машине, что лишь в самых редких случаях могут считаться вполне точными.

Оба указанных обстоятельства побудили специалистов строить тепловой расчет электрических машин на основе такой схематизации, при которой неизбежная неточность результата оправдывалась простотой и наглядностью самого метода расчета, т. е. практической целесообразностью метода.

Важнейший шаг в этом направлении был сделан в 1931 г. Р. Зодербергом, который разработал метод эквивалентной замены элементов поля с внутренними источниками тепла элементами без внутренних источников [85]. Суть этого предложения сводилась к двум основным принципам: 1) к замене решения одномерного стационарного уравнения Пуассона (11-13) решением одномерного стационарного уравнения Лапласа (11-15) при таком преобразовании размеров элемента (т. е. координаты x), которое приводило бы к искомому численному результату; 2) к получению двумерных решений на основе одномерных по правилам сложения сопротивлений линейной электрической цепи.

Метод Р. Зодерберга получил широкое распространение и в отечественную практику был внедрен работами М. П. Костенко [3] и А. Е. Алексеева [2] в качестве метода эквивалентных тепловых схем. Эквивалентные схемы и по сей день служат основой теплового расчета электрических машин всех типов.

Для решения нестационарных задач была разработана так называемая классическая теория нестационарного нагрева [2], которая рассматривала электрическую машину или ее элемент как однородное тело бесконечной теплопроводности, окруженное бесконечнотеплоемкой охлаждающей средой. При таком рассмотрении уравнение теплопроводности дает решение в форме экспоненциальной зависимости температуры от времени.

Классическая теория нестационарного нагрева также получила широкое распространение и позволила дать достаточно надежный численный анализ многих неустановившихся тепловых процессов, в том числе режимов повторно-кратковременной нагрузки машин. Однако некоторые новые задачи, связанные с освоением более использованных и сложных конструкций, потребовали разработки новых решений, не содержащих весьма радикальных допущений классической теории. Последнее в осо-

бенности относится к конструкциям с непосредственным охлаждением.

Много нового внесло в тепловой расчет освоение вычислительной техники. Прежде всего была создана возможность получить численные решения тех дифференциальных уравнений, для которых отсутствуют общие решения. Но и при наличии общих решений многие задачи оказалось целесообразно решать путем приближений (итераций). Цифровые машины позволяют, кроме того, получать решение систем уравнений, что при ручном счете практически неосуществимо. В тепловом расчете, где всегда присутствует условие единственности температуры на границе двух или нескольких тел, решение систем уравнений (как дифференциальных, так и алгебраических) является крайне актуальной задачей.

Ценным инструментом теплового расчета оказались аналоговые вычислительные машины. На основе аналогии уравнений электрических и тепловых цепей могут быть определены поля температуры для сложной комбинации тепловых сопротивлений, моделируемых электрическими сопротивлениями.

Таким образом, современный тепловой расчет электрических машин базируется на решениях дифференциальных уравнений теплопроводности в тех случаях, когда особо важно получить картину непрерывного распределения температуры в пространстве или во времени. В других случаях на основе упрощенных уравнений пользуются эквивалентными электрическими схемами для стационарных задач и представлением об однородных телах для задач нестационарных. Существуют синтетические методы, с успехом использующие особенности строгих и упрощенных решений.

Вычислительная техника в качестве мощного инструмента применяется независимо от избранного метода теплового расчета и сама содействует выработке новых методов.

13-4. Эквивалентные тепловые схемы

Решение одномерного стационарного уравнения Пуассона (11-13) для симметрично охлаждаемой бесконечной пластины толщиной 2δ в соответствии с (12-5) дает:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \rho_0 \left[\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right) \right]. \quad (13-2)$$

Это решение действительно для пластины толщиной δ , охлаждаемой с одной стороны (условие симметрии). Если размеры такой пластины ограничены высотой h и шириной b , то при суммарных потерях в пластине P получим $\rho_0 = P/\delta bh$ и при температуре окружающей среды $\vartheta_0 = 0$

$$\vartheta = P \left[\frac{1}{\alpha bh} + \frac{\delta}{2 \lambda bh} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right) \right]. \quad (13-3)$$

Из (13-3) следует:

$$\vartheta_{\text{макс}} = P \left(\frac{1}{\alpha b h} + \frac{\delta}{2} \frac{1}{\lambda b h} \right); \quad (13-4)$$

$$\vartheta_{\text{мин}} = P \frac{1}{\alpha b h}; \quad \Delta \vartheta = \vartheta_{\text{макс}} - \vartheta_{\text{мин}} = P \frac{\delta}{2} \frac{1}{\lambda b h}.$$

Средняя температура

$$\vartheta_{\text{ср}} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} P \left[\frac{1}{\alpha b h} + \frac{\delta}{2} \frac{1}{\lambda b h} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} \right) \right] dx =$$

$$= \left(P \frac{1}{\alpha b h} + \frac{\delta}{3} \frac{1}{\lambda b h} \right). \quad (13-5)$$

Поставим теперь задачу определить толщину эквивалентной пластины, которая имела бы такую же температуру (среднюю

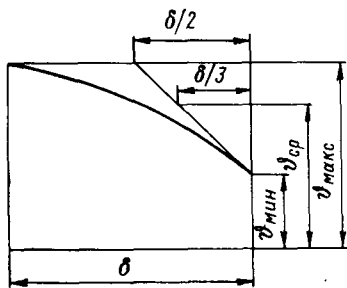


Рис. 13-2. Эквивалентная пластина

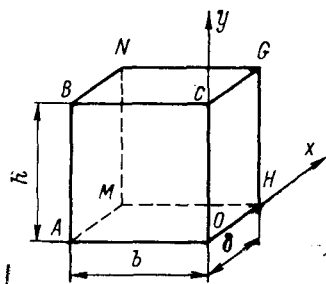


Рис. 13-3. Двумерная теплопроводность

или максимальную, по выбору), как рассмотренная пластина, но при условии, что потери сосредоточены на одной из ее боковых поверхностей. Как легко понять, решение этой задачи позволит заменять в одномерных процессах элементы с распределенными потерями эквивалентными элементами с сосредоточенными потерями.

Решение уравнения Лапласа (11-15) для охлаждаемой с одной стороны пластины толщиной δ , когда потери сосредоточены на неохлаждаемой стороне, для максимальной температуры дает:

$$\vartheta_{\text{экв. макс}} = P \left(\frac{1}{\alpha b h} + \frac{\delta_{\text{экв}}}{\lambda b h} \right). \quad (13-6)$$

Следовательно, если максимальная температура эквивалентной пластины (рис. 13-2) должна быть равна максимальной температуре реальной пластины, приравнявая (13-6) и (13-4), получим $\delta_{\text{экв}} = \delta/2$. Если же необходимо выполнить требование получать при эквивалентной замене среднюю температуру, то,

сравнивая (13-6) и (13-5), будем иметь $\delta_{\text{экв}} = \delta/3$. Таким образом, эквивалентная толщина пластины определяется при замене параболы прямой линией.

Назовем величину $\delta_{\text{экв}}/(\lambda bh)$ термическим сопротивлением пластины и будем трактовать процесс теплопроводности в реальной пластине по (13-4) как результат преодоления тепловым потоком P двух сопротивлений: термического сопротивления $\frac{\delta}{2} \frac{1}{\lambda bh} = \frac{\delta}{2\lambda bh}$ и теплового сопротивления конвекции $1/(abh)$, так что суммарное сопротивление

$$R = \frac{\delta_{\text{экв}}}{\lambda bh} + \frac{1}{abh}. \quad (13-7)$$

Рассмотрим теперь двумерную стационарную задачу (рис. 13-3). Будем считать, что в направлениях осей Ox и Oy имеются независимые сопротивления вида (13-7) и что при взаимодействии они складываются как параллельные сопротивления электрической линейной цепи. Получим:

$$R_x = \frac{1}{\alpha_x bh} + \frac{\delta}{3} \frac{1}{\lambda_x bh}; \quad R_y = \frac{1}{\alpha_y bh} + \frac{h}{3} \frac{1}{\lambda_y bh}$$

и в соответствии с сформулированным принципом

$$R = \frac{R_x R_y}{R_x + R_y}.$$

Следует подчеркнуть, что изложенный метод расчета позволяет получить не только локальные значения температуры, но и ее распределение, предполагая параболическую зависимость от координат в обоих направлениях.

Сопоставление результатов расчета по методу эквивалентных схем с результатами точного решения двумерных задач [85] показало, что ошибка в определении средней температуры не превосходит 4,0% максимальной температуры — 7,5%. Такая точность вполне удовлетворительна для целей практики.

В настоящее время эквивалентные тепловые схемы применяются также для решения задач с трехмерным распространением тепла, причем именно в этом случае данному методу практически не могут быть противопоставлены какие-либо иные методы теплового расчета.

13-5. Пример расчета эквивалентной тепловой схемы статора турбогенератора с водяным охлаждением обмотки

Рассмотрим в качестве примера применение эквивалентных схем в тепловом расчете статора турбогенератора с водяным охлаждением обмотки [62].

На рис. 13-4 представлен один зубцовый шаг пакета сердечника с обмоткой, который принимается за расчетную ячейку.

Эквивалентная тепловая схема замещения показана на рис. 13-5. Рассматриваются следующие виды потерь: P_M — потери в меди обмотки на один зубцовый шаг в одном пакете, *вт*; P_z — потери в стали зубцов на зубцовый шаг, *вт*; P_a — потери в стали цилиндрической части пакета на один зубцовый шаг, *вт*.

При составлении эквивалентной схемы замещения предполагается следующая картина течения тепла. Потери, выделяющиеся в зубцах статора, движутся вдоль листов к расточке статора (P_{dz}) и поперек листов к радиальному каналу (P_{qz}); часть потерь направлена вдоль листов к цилиндрической поверхности сердечника (P_{az}), и, наконец, остающиеся потери через изоляцию обмотки направлены к воде в каналах (P_{zm}). Потери, выделяющиеся в цилиндрической части сердечника статора, вместе с потоком из зубцов P_{az} движутся в направлении поперек листов стали к вентиляционному каналу (P_{qa}) и в направлении вдоль листов к наружной поверхности сердечника (P_{da}).

Потери P_M направлены к воде в каналах. Так как температура охлаждающей воды, вообще говоря, отличается от темпе-

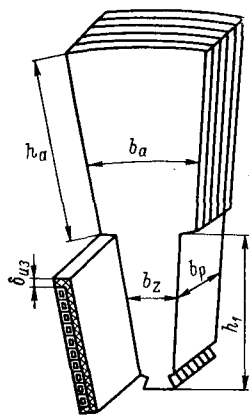


Рис. 13-4. Расчетный элемент сердечника с обмоткой

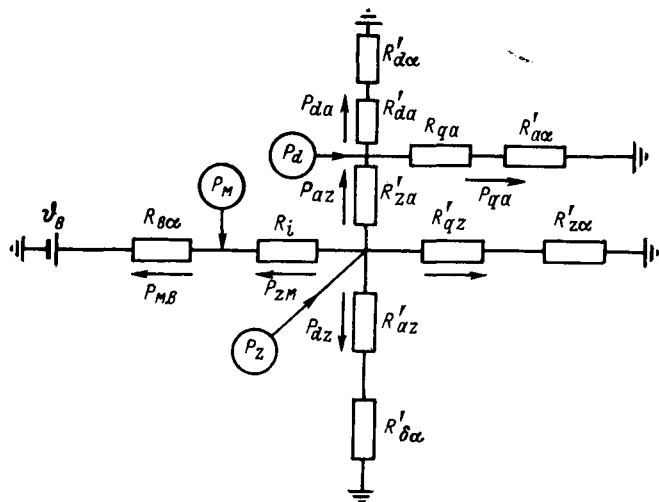


Рис. 13-5. Схема замещения

ратуры охлаждающего газа, то в цепь сопротивления $R_{\delta\alpha}$ последовательно включена дополнительная э. д. с. \mathcal{E}_B , которая изменяется в зависимости от температуры воды в обмотке. Сле-

дует также иметь в виду, что при достаточно высокой температуре воды в каналах поток $P_{зм}$ может изменить направление на противоположное, т. е. часть потерь обмотки будет поступать в зубец.

Обозначим теперь тепловые сопротивления:

R_i — тепловое сопротивление изоляции в пакете, град/вт;

R'_{dz} — тепловое сопротивление зубца вдоль листов стали, град/вт;

R'_{qz} — тепловое сопротивление зубца поперек листов стали, град/вт;

$R'_{\delta\alpha}$ — тепловое сопротивление зубца с поверхности в зазоре машины, град/вт;

R'_{zd} — тепловое сопротивление зубца с поверхности в радиальном канале, град/вт;

R'_{za} — тепловое сопротивление вдоль листов стали между зубцом и цилиндрической частью сердечника, град/вт;

R'_{qa} — тепловое сопротивление цилиндрической части сердечника поперек листов стали, град/вт;

R'_{da} — тепловое сопротивление цилиндрической части сердечника вдоль листов стали, град/вт;

$R'_{\delta\alpha}$ — тепловое сопротивление с наружной поверхности сердечника, град/вт;

$R'_{\alpha\alpha}$ — тепловое сопротивление цилиндрической части сердечника с поверхности радиального канала, град/вт;

$R_{в\alpha}$ — тепловое сопротивление с поверхности меди к воде, град/вт.

Тепловые сопротивления в соответствии с обозначениями на рис. 13-14 рассчитываются по формулам:

$$R_i = \frac{\delta_{из}}{\lambda_{из} h_1 b_p}; \quad R'_{dz} = \frac{h_1}{2\lambda_d b_2 b_p}; \quad R'_{qz} = \frac{b_p}{4\lambda_q b_2 h_1};$$

$$R'_{\delta\alpha} = \frac{1}{\alpha_\delta b_2 b_p}; \quad R'_{z\alpha} = \frac{1}{2\alpha_z b_2 h_1}; \quad R'_{za} = R'_{dz} + R'_{da};$$

$$R'_{qa} = \frac{b_p}{4\lambda_q b_a h_a}; \quad R'_{da} = \frac{h_a}{2\lambda_d b_a b_p}; \quad R'_{\delta\alpha} = \frac{1}{\alpha_d b_a b_p};$$

$$R'_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\alpha_a b_a h_a}; \quad R_{в\alpha} = \frac{1}{2\alpha_{в} (b_p + 0,005) \Pi_9}.$$

Здесь обозначение

$$\Pi_9 = \sum_{i=1}^n \Pi_{\kappa i},$$

где n — число охлаждающих каналов в одном пазу; Π_K — периметр одного канала, m .

Другие обозначения очевидны.

Преобразуем схему на рис. 13-5 в схему на рис. 13-6, для чего

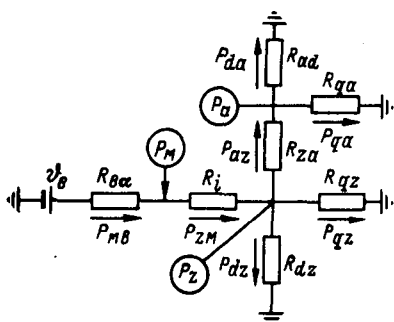


Рис. 13-6. Преобразованная схема замещения

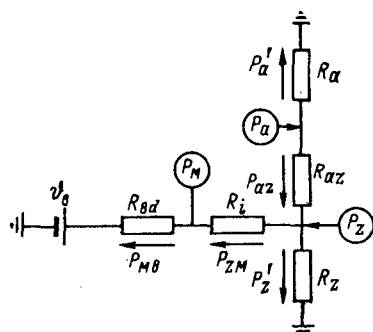


Рис. 13-7. Упрощенная схема замещения

сложим последовательно соединенные сопротивления; будем иметь:

$$R_{dz} = R'_{dz} + R'_{\delta\alpha};$$

$$R_{qz} = R'_{qz} + R'_{z\alpha};$$

$$R_{qa} = R'_{qa} + R'_{\alpha\alpha};$$

$$R_{ad} = R'_{da} + R_{d\alpha}.$$

Произведем теперь суммирование параллельно соединенных сопротивлений (рис. 13-7); получим:

$$R_z = \frac{R_{dz}R_{qz}}{R_{dz} + R_{qz}};$$

$$R_a = \frac{R_{ad}R_{aq}}{R_{ad} + R_{aq}}.$$

Преобразуем соединение сопротивлений R_z , R_a и R_{za} из треугольника в звезду (рис. 13-8); будем иметь:

$$R_1 = \frac{R_z R_{za}}{R_z + R_a + R_{za}};$$

$$R_2 = \frac{R_a R_{za}}{R_z + R_a + R_{za}};$$

$$R_3 = \frac{R_z R_a}{R_z + R_a + R_{za}};$$

$$P_{м.в} = P_m + P_{zm}; \quad P_{zm} = P_z - P_{z1}; \quad P_{az} = P_a + P_{z1};$$

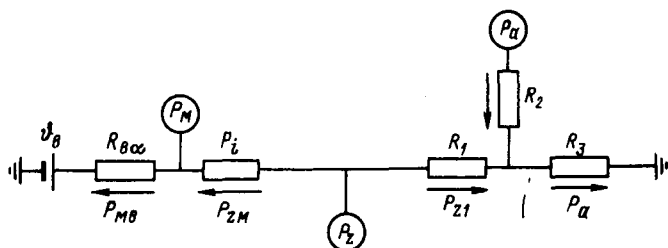


Рис. 13-8. Схема после преобразования соединений из треугольника в звезду

Уравнение теплового баланса расчетной ячейки запишется теперь в виде:

$$\vartheta_z = \vartheta_B + P_{м.в} R_{B\alpha} + P_{zm} R_{B\alpha} + P_{zm} R_i = P_{z1} R_1 + (P_{z1} + P_a) R_3;$$

отсюда

$$P_{zm} = \frac{P_z (R_1 + R_3) + P_a R_3 - P_{м.в} R_{B\alpha} - \vartheta_B}{R_i + R_1 + R_3 + R_{B\alpha}}$$

и превышения температуры выразятся следующим образом:

а) для зубцов

$$\vartheta_z = P_{zm} (R_i + R_{B\alpha}) + P_{м.в} R_{B\alpha} + \vartheta_B;$$

б) для меди

$$\vartheta_m = (P_{zm} + P_m) R_{B\alpha} + \vartheta_B;$$

в) для сердечника

$$\vartheta_a = P_a (R_2 + R_3) + P_{z1} R_3.$$

13-6. Замена дифференциальных уравнений с частными производными обыкновенными дифференциальными уравнениями

Идея замены уравнения двумерного стационарного процесса системой обыкновенных дифференциальных уравнений, весьма близкая к методу, изложенному выше, но позволяющая в отдель-

ных случаях повысить точность результата, принадлежит В. Г. Данько [23].

Поясним суть метода на примере расчета температуры двух соприкасающихся брусков (граничные условия четвертого рода), охлаждаемых с поверхности, т. е. на примере так называемой задачи на сращивание (рис. 13-9).

Для первого бруска имеем:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2} = -\frac{P'_0}{\lambda}; \quad -\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + h\vartheta_1 \Big|_{x=0} = 0.$$

Для второго бруска:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2} = -\frac{P'_0}{\lambda}; \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_2} = 0.$$

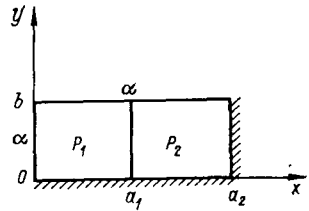


Рис. 13-9. К постановке задачи на сращивание двух брусков

Условия на поверхности соприкосновения (условия сращивания) дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \Big|_{x=a_1} &= \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_1}; & \vartheta_1(a_1) &= \vartheta_2(a_1); \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0; & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + h\vartheta \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

Введем среднее значение температуры на отрезке $(0, b)$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{b} \int_0^b \vartheta(x, y) dy$$

и допустим, что отношение температуры $\vartheta(x, y)$ в точке (x, y) к средней температуре $\bar{\Theta}$ равно отношению температуры ϑ_y в этой же точке бесконечной пластины толщиной b с заданными условиями охлаждения на границах к средней температуре бесконечной пластины, считая, что в бесконечность продолжена координата x , т. е. допустим $\vartheta(x, y)/\bar{\Theta} \approx \vartheta_y/\bar{\Theta}_y = \Phi(y)$, $\vartheta(x, y) = \Phi(y)\bar{\Theta}$, где ϑ_y — распределение температуры по толщине бесконечной пластины. Тогда в соответствии с (13-2)

$$\Phi(y) = \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{2}{bh} + 1 - \frac{y^2}{b^2} \right); \quad m^2 = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{bh}}.$$

Допустим также, что тепловой поток на границе определяется средней температурой $\bar{\Theta}$:

$$\alpha = \frac{-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=b}}{\bar{\Theta}} \approx \frac{\int_0^b P_0 dx}{\bar{\Theta}_y} = \frac{P_0 b}{\frac{\rho_0 b^2}{\lambda} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{bh} \right)} = \frac{\lambda}{b} m^2,$$

где α — коэффициент теплообмена.

Умножая исходные уравнения и граничные условия на $1/b$ и интегрируя по y в диапазоне $0 - b$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\Theta}_1}{dx^2} - \frac{\alpha}{b\lambda} \bar{\Theta}_1 + \frac{P'_0}{\lambda} &= 0; \\ \frac{d^2 \bar{\Theta}_2}{dx^2} - \frac{\alpha}{b\lambda} \bar{\Theta}_2 + \frac{P''_0}{\lambda} &= 0; \\ \bar{\Theta}_1|_{x=a_1} &= \bar{\Theta}_2|_{x=a_1}; \quad \frac{d\bar{\Theta}_2}{dx} \Big|_{x=a_1} = \frac{d\bar{\Theta}_2}{dx} \Big|_{x=a_1}. \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

Как можно видеть, исходная система уравнений с частными производными заменена системой (13-8) обыкновенных дифференциальных уравнений. Их решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_1 &= \frac{\text{ch}\left(m \frac{x}{b}\right)}{\frac{bh}{m} + \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right)} \left\{ -\frac{hb^3 P'_0}{m^3 \lambda} + \frac{P''_0 - P'_0}{\lambda m^2} b^2 \left[\text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right) \text{ch}\left(m \frac{a_1}{b}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{sh}\left(m \frac{a_1}{b}\right) \right] \right\} + \frac{\text{sh}\left(m \frac{x}{b}\right)}{\frac{bh}{m} + \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right)} \left\{ \frac{hb^3 P'_0}{\lambda m^3} \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right) + \frac{hb^3 P''_0 - P'_0}{m^3 \lambda} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right) \text{ch}\left(m \frac{a_1}{b}\right) - \text{sh}\left(m \frac{a_1}{b}\right) \right] \right\} + \frac{P'_0}{\lambda m^2} b^2; \\ \bar{\Theta}_2 &= \frac{\text{sh}\left(m \frac{x}{b}\right)}{\frac{bh}{m} + \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right)} \left\{ hb^3 \frac{P'_0}{m^3 \lambda} + \frac{b^2 (P''_0 - P'_0)}{m^2 \lambda} \left[\text{sh}\left(m \frac{a_1}{b}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{hb}{m} \text{ch}\left(m \frac{a_1}{b}\right) \right] \right\} \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right) - \frac{\text{ch}\left(m \frac{x}{b}\right)}{\frac{bh}{m} + \text{th}\left(m \frac{a_2}{b}\right)} \left\{ \frac{hb^3 P'_0}{\lambda m^3} + \frac{P''_0 - P'_0}{\lambda m^2} \left[b^2 \text{sh} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(m \frac{a_1}{b} \right) + \frac{hb}{m} \text{ch}\left(\frac{a_1}{b} m\right) \right] \right\} + \frac{P''_0}{\lambda m^2} b^2. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\vartheta(x, y) = \Phi(y) \bar{\Theta}$, завершаем решение задачи.

Численный анализ задачи для значений параметров $\frac{P'_0}{P'_0 + P''_0} = 0,3 \div 0,7$; $ha_2 = 0,1 \div 1,0$ показывает, что ошибка расчета по изложенной упрощенной методике по сравнению с точным расчетом (на основе системы уравнений с частными производными)

для случая изотропных тел весьма незначительна и не превосходит 4% для граничных значений параметров $\left(\frac{P_0'}{P_0'' + P_0'} = 0,7; ha_2 = 1,0\right)$. По-видимому, при более широком использовании методики целесообразно исследовать решения задачи для анизотропных тел (сердечник статора) с несимметричными граничными условиями.

13-7. Синтез эквивалентной тепловой схемы машины и дифференциального уравнения теплопроводности исследуемого элемента машины

Такой синтез предложил Ю. К. Васильев [9]. Суть предложенного им метода расчета сводится к следующему.

Запишем дифференциальное уравнение исследуемого элемента конструкции электрической машины, например обмотки возбуждения двигателя постоянного тока:

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + p_0(\vartheta).$$

Теперь вместо классического граничного условия, например условия третьего рода $-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha \vartheta \Big|_{x=l}$, введем граничное условие в форме:

$$-\lambda S \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=l} = RS\vartheta \Big|_{x=l}, \quad (13-9)$$

где R — тепловое сопротивление катушки по оси Ox на границе с другими элементами конструкции, в том числе с охлаждающей средой. Сопротивление R определяется эквивалентной тепловой схемой машины. Величина S в новой форме граничного условия третьего рода есть площадь сечения катушки, перпендикулярного оси Ox .

Формула (13-9) является несомненно целесообразным обобщением классического граничного условия третьего рода, исходящим из особенностей конструкции электрических машин.

13-8. Применение вычислительных машин

Целесообразность применения вычислительной техники для трудоемких вычислений в тех случаях, когда известно общее решение уравнения процесса, не вызывает сомнений. В данном параграфе речь идет о специфических методах теплового расчета, связанных с возможностями, которыми обладают вычислительные машины.

Машины (как цифровые, так и непрерывного действия) позволяют получать поле температуры в итоге решения системы

линейных алгебраических уравнений высокого порядка, заменяющих дифференциальное уравнение теплопроводности с произвольной точностью. Чтобы осуществить указанную замену, уравнение теплопроводности сводится к уравнению в конечных разностях.

Назовем первыми разностями (правыми и левыми) для функции $y=f(x)$ одного аргумента x выражения $\Delta^+f=f(x+h)-f(x)$ и $\Delta^-f=f(x)-f(x-h)$. В случае функции двух переменных $u=u(x, y)$ вторыми разностями будут:

$$\Delta_x^2\vartheta = \vartheta(x+h, y) + \vartheta(x-h, y) - 2\vartheta(x, y);$$

$$\Delta_y^2\vartheta = \vartheta(x, y+h) + \vartheta(x, y-h) - 2\vartheta(x, y).$$

Теперь вторая производная функции одного аргумента может быть заменена разностным отношением:

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2} = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta^+ f}{h} - \frac{\Delta^- f}{h} \right] = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Разностное отношение для оператора Лапласа запишется в виде:

$$\frac{\Delta\vartheta}{h^2} = \frac{\vartheta(x+h, y) + \vartheta(x, y+h) + \vartheta(x-h, y) + \vartheta(x, y-h) - 4\vartheta(x, y)}{h^2}. \quad (3-10)$$

При замене дифференциального уравнения разностным осуществляется переход от непрерывного изменения аргумента к дискретному. В плоскости определения поля температуры (x, y) строится сетка ортогональных прямых, находящихся друг от друга на расстоянии h . В узловых точках полученной сетки записываются значения искомой функции ϑ в соответствии с (3-10). Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом последовательных приближений. Суть его сводится к следующему.

Разность в числителе (3-10) справа должна быть равна нулю, либо в неоднородных задачах значению потерь (теплового потока) в точке (x, y) .

Если предварительно распределить температуру так, чтобы во всех узлах, образующих границу, она была равна заданной граничной температуре, а в узлах внутри исследуемой области имела произвольные значения, то разности (3-10) окажутся, вообще говоря, отличными от нуля. Последовательным изменением величины $\vartheta_{i, k}$ (за исключением граничных) все разности сводятся к нулю.

Поскольку число уравнений равно числу неизвестных значений температуры, процесс уменьшения разностей (его называют иногда релаксацией) является во всех физических задачах процессом сходящимся.

Когда уравнение теплопроводности представлено в разностной форме, определение поля температуры может быть произведено с помощью цифровых машин (дискретного счета) или сеточных устройств, в которых используется аналогия сопротивлений электрической и тепловой цепей. Точность расчета на цифровых машинах выше, но сеточные устройства позволяют экономить время, в особенности при многовариантном анализе.

Оба вида машин позволяют исследовать и нестационарные процессы, для чего производится дополнительная дискретизация по времени и учитывается начальное распределение температуры.

Тепловой расчет на цифровой машине с применением конечных разностей приведен в [64].

Рассмотрим результаты расчета стационарного поля температуры в сердечнике статора турбогенератора, выполненного на аналоговой машине типа МСМ-1 в предположении, что в тангенциальном направлении (т. е. в направлении от одного паза к другому) тепло не распространяется. На рис. 13-10 приведена схема разбиения сердечника на элементы, причем считается, что в узлах полученной сетки сосредоточены потери, которые выделяются в прилежащем элементе.

Электрические сопротивления аналогового устройства моделируют термические сопротивления между узлами сетки и сопротивления на охлаждаемых поверхностях. Схема соединений всех сопротивлений аналога соответствует принятому разбиению участка. В каждый узел подается ток, соответствующий заданным потерям в узле. Условия охлаждения моделируются при помощи потенциалов, соответствующих температуре окружающей среды в каждом данном (граничном) элементе. Полученное дискретное поле напряжений воспроизводит в известном масштабе истинное поле температуры.

13-9. Тепловой расчет нестационарных процессов. Классическая теория нестационарного теплообмена

Аналитические решения нестационарных задач, как можно видеть из материала гл. 12, достаточно громоздки. Что же касается нестационарных процессов в электрических машинах, то

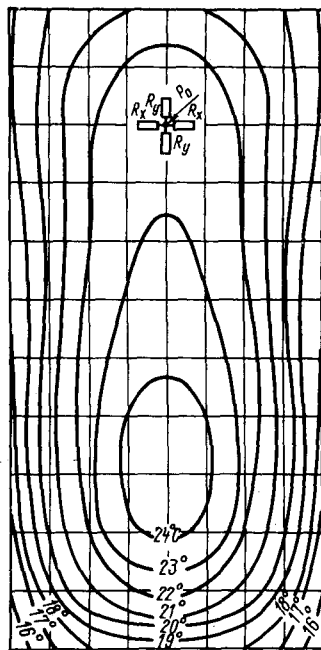


Рис. 13-10. Поле температуры расчетного элемента

их следует отнести к числу вполне типичных эксплуатационных явлений, в связи с чем их анализ весьма актуален. По этой причине при разработке теории электрических машин предпринимались попытки получить расчетные формулы на основе таких допущений, которые бы, схематизируя процесс, давали результаты, удовлетворительно приближающиеся к действительности.

Система таких допущений, очевидных физически и весьма радикально упрощающих расчет, послужила основой так называемой классической теории нестационарного теплообмена в электрических машинах. Классическая теория оказалась плодотворной, получила широчайшее распространение и позволила построить тепловой расчет электрических машин для условий нестационарности различной природы.

Допущениями классической теории являются следующие утверждения.

1. Вся электрическая машина (или ее анализируемый элемент) является единым телом, обладающим свойством неограниченной теплопроводности, что приводит к отсутствию градиента температуры по любому направлению в объеме машины ($\partial\vartheta/\partial x=0$).

2. Температура окружающей среды ϑ_c неизменна, что означает, что окружающая среда обладает неограниченной теплоемкостью.

3. Коэффициент теплообмена α между поверхностью машины и окружающей средой не зависит от места и времени процесса.

Запишем теперь уравнение теплопроводности для единицы объема тела, охлаждаемого с поверхности:

$$c\gamma \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + p_0 - \alpha \frac{F}{V} (\vartheta - \vartheta_c).$$

При рассмотрении конкретного объема V для условий $\partial\vartheta/\partial x=0$, $\vartheta_c=0$, получим:

$$P dt = cG d\vartheta + \alpha F\vartheta dt, \quad (13-11)$$

где $G = \gamma V$ есть вес тела; $P = p_0 V$ — выделяемые потери.

Уравнение (13-11) легко трактуется как уравнение теплового баланса, в соответствии с которым выделившееся тепло расходуется частично на повышение теплосодержания тела, частично отводится в окружающую среду. Таким образом (13-11), может быть получено непосредственно из рассуждений.

На основе уравнения (13-11) проанализируем вначале процесс нагревания тела. Если выделяющиеся потери P конечны, то при стремлении времени процесса к бесконечности температура тела стремится к установившемуся значению: при $t \rightarrow \infty$ $\vartheta \rightarrow \vartheta_y$. Но в установившемся режиме теплосодержание не меняется и все тепло, выделяющееся в течение произвольного отрезка времени Δt , передается окружающей среде: $P\Delta t =$

$= \alpha F \vartheta_y \Delta t$. Отсюда $\vartheta_y = P/\alpha F$. Теперь уравнение (13-11) может быть переписано в виде:

$$\alpha F \vartheta_y dt = cG d\vartheta + \alpha F \vartheta dt.$$

В последнем уравнении переменные разделяются:

$$\frac{\alpha F}{cG} dt = \frac{d\vartheta}{\vartheta_y - \vartheta}.$$

Введем обозначение $cG/\alpha F = T$. Тогда

$$\frac{t}{T} = -\ln(\vartheta_y - \vartheta) + C.$$

В начале процесса машина имела фиксированную температуру ϑ_0 , т. е. при $t=0$, $\vartheta = \vartheta_0$, откуда $C = \ln(\vartheta_y - \vartheta_0)$. Таким образом,

$$\frac{t}{T} = \ln \frac{\vartheta_y + \vartheta_0}{\vartheta_y - \vartheta}; \quad \vartheta = \vartheta_y (1 - e^{-t/T}) + \vartheta_0 e^{-t/T}. \quad (13-12)$$

Полученное уравнение нагревания представляет экспоненциальный закон увеличения температуры со временем (рис. 13-11). Заметим, что при $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta = \vartheta_y (1 - e^{-t/T})$.

Рассмотрим теперь процесс остывания из установившегося состояния при сбросе нагрузки. Для этой цели положим в уравнении (13-11) $P = 0$. Будем иметь:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\alpha F}{cG} dt = -\frac{dt}{T},$$

откуда $t/T = -\ln \vartheta + C$. Учтывая, что при $t=0$, $\vartheta = \vartheta_0$, получим:

$$C = \ln \vartheta_0 \text{ и } \vartheta = \vartheta_0 e^{-t/T}. \quad (13-13)$$

Как можно видеть (рис. 13-11), кривая нагревания при $\vartheta_0 \neq 0$ есть сумма кривой нагревания при $\vartheta_0 = 0$ и кривой остывания от температуры ϑ_0 . Практически она может быть получена параллельным переносом влево кривой $\vartheta_{\vartheta_0=0}(t)$.

Из изложенного следует интересная возможность экспериментального определения неизвестных потерь при сбросе нагрузки из установившегося теплового состояния. В самом деле, из (13-13)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{T} \vartheta_0 e^{-t/T}.$$

Экстраполируем полученную функцию уменьшения температуры в ноль. Получим:

$$\left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{T} \vartheta_0.$$

Учитывая, что $\vartheta_0 = P/aF$ и $T = cG/aF$, будем иметь:

$$P = -cG \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (13-14)$$

Следовательно, для вычисления потерь должен быть определен лишь тангенс угла наклона кривой остывания.

Постоянная T , характеризующая интенсивность нестационарного теплообмена и зависящая от теплоемкости тела, его веса G , поверхности охлаждения и коэффициента теплообмена, очень удобна при анализе переменных нагрузок и других неустано-

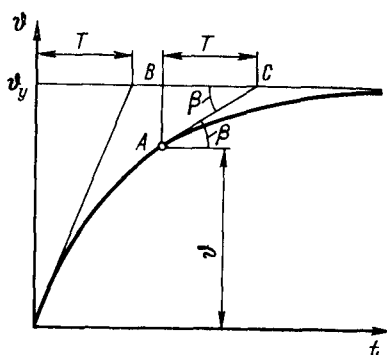
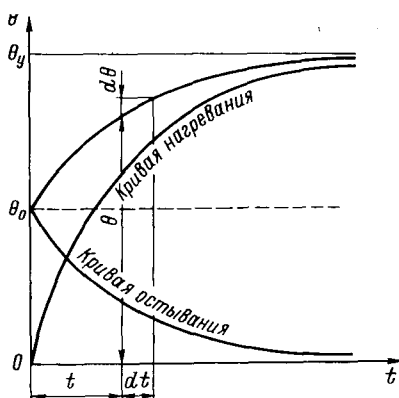


Рис. 13-11. Кривая изменения температуры

Рис. 13-12. К геометрическому смыслу постоянной времени

вившихся режимов. Она называется постоянной времени и имеет простой геометрический смысл (рис. 13-12).

Из уравнения (13-12) при $\vartheta_0 = 0$ $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{T} (\vartheta_y - \vartheta)$. Но $\frac{d\vartheta}{dt} = \text{tg } \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{BC} (\vartheta_y - \vartheta)$, где BC — подкасательная кривой нагревания. Отсюда для произвольной точки кривой

$$\frac{1}{T} (\vartheta_y - \vartheta) = \frac{1}{BC} (\vartheta_y - \vartheta) \text{ и } T = BC.$$

Таким образом, T есть подкасательная в произвольной точке кривой нагревания (либо остывания).

Представляет интерес анализ адиабатного нестационарного процесса, т. е. процесса без теплообмена с окружающей средой. Примем в уравнении (13-11) $\alpha = 0$, тогда $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{P}{cG} = \text{const}$. Для медной обмотки, например, $c = 0,39$; $\gamma = 8,9$ и $\rho = 0,0175$. Отсюда для скорости нарастания температуры обмотки при набросе постоянного тока плотности j , а/мм^2 , получим:

$$\frac{P}{cG} = \frac{j^2 \rho l S}{c \gamma l S} = \frac{j^2}{c \gamma \rho} = \frac{j^2}{200}, \text{ град/сек.}$$

При внезапном изменении нагрузки процесс нарастания температуры в начальный отрезок времени можно рассматривать как адиабатный:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Delta P}{cG} = \frac{j_2^2 - j_1^2}{c\gamma/\rho} = \frac{j_1^2 (k_j^2 - 1)}{c\gamma/\rho},$$

где $k_j = j_2/j_1$ — кратность перегрузки по току.

Характерно, что при экспоненциальном возрастании температуры ее установившееся значение практически достигается через промежуток времени, равный четырем постоянным T . Это видно из следующих значений $\frac{\vartheta}{\vartheta_y} = 1 - e^{-t/T}$:

Время процесса	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$
Температура в долях установившегося значения	0,632	0,865	0,950	0,982	0,993

Типичным режимом нагрузки некоторых электрических машин, например прокатных двигателей, является режим повторно-кратковременной нагрузки. Если время работы с нагрузкой (рис. 13-13) в каждом цикле τ равно τ_n и время холостого хода равно τ_0 , то отношение $\tau_n/\tau = \tau_n/(\tau_n + \tau_0)$ представит относительную продолжительность включения (обычно она измеряется в процентах и равна 15; 25 или 40%).

По истечении некоторого времени режим устанавливается, т. е. уменьшение температуры за время остывания τ_0 становится равным увеличению температуры за время τ_n .

В установившемся повторно-кратковременном режиме

$$\vartheta_{\text{макс}} = \frac{1 - e^{-\tau_n/T}}{1 - e^{-\tau/T}} \vartheta_y; \quad \vartheta_{\text{мин}} = \frac{e^{-\tau_0/T} - e^{-\tau/T}}{1 - e^{-\tau/T}} \vartheta_y,$$

где ϑ_y — установившееся значение температуры в длительном режиме [17].

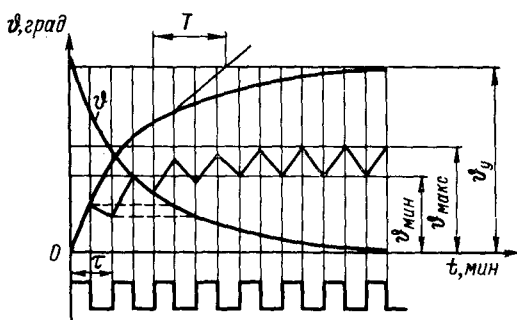


Рис. 13-13. График повторно-кратковременной нагрузки и изменения температуры

13-10. Расчет теплообменников электрических машин

В зависимости от рода охлаждающей среды в электрических машинах применяются теплообменники различных типов. Основное значение имеют воздухо- и газоохладители,

в которых циркулирующий в машине воздух или водород охлаждается водой. В последнее время в связи с развитием водяного охлаждения обмоток все большее распространение приобретают водо-водяные теплообменники, предназначенные для охлаждения циркулирующего в каналах обмоток дистиллята или конденсата.

Для охлаждения масла, циркулирующего в подшипниках, применяют водяные маслоохладители. Наконец, некоторые закрытые электрические машины охлаждаются воздухом машинного зала путем применения воздухо-воздушных теплообменников. В последнем случае внутри машины циркулирует замкнутый объем воздуха под воздействием вентиляторов на валу машины.

С точки зрения процесса теплопередачи работа теплообменников разных типов характеризуется большой общностью. Независимо от конструкции охладителя механизм теплообмена сводится к передаче тепла от теплоносителя, циркулирующего внутри машины, к теплоносителю, циркулирующему вне машины. Таким образом, в процессе теплопередачи участвуют: теплоотдача от первого теплоносителя к наружным стенкам охлаждающих трубок; теплопроводность от наружных стенок трубок к внутренним; теплоотдача от внутренних стенок ко второму теплоносителю. В соответствии с этим суммарное тепловое сопротивление процесса включает в себя три составляющих тепловых сопротивления — два сопротивления теплоотдачи и сопротивление теплопроводности:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1 n} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad (13-15)$$

где k — коэффициент теплопередачи, $квт/(м^2 \cdot град)$; α_1 — коэффициент теплоотдачи от первого теплоносителя к наружной поверхности трубок, $квт/(м^2 \cdot град)$; δ — толщина стенок трубок, $м$; λ — коэффициент теплопроводности материала трубок, $квт/(м \cdot град)$; α_2 — коэффициент теплоотдачи от внутренней поверхности трубок ко второму теплоносителю, $квт/(м^2 \cdot град)$; n — коэффициент оребрения трубок, равный отношению наружной поверхности трубок к внутренней.

Как видно из (13-15), для уменьшения суммарного теплового сопротивления теплообменника, или, иначе говоря, для увеличения его коэффициента теплопередачи, следует стремиться к увеличению коэффициентов теплоотдачи и уменьшению толщины стенок охлаждающих трубок, которое бывает связано с особенностями конструкции и технологии изготовления теплообменников. Что же касается коэффициентов теплоотдачи, то их значения, как известно, определяются, главным образом, характером движения соответствующего теплоносителя относительно стенок трубок. Поскольку теплообменники изготавливаются в виде серий,

методы их расчета разработаны также применительно к проектированию серий.

Воздухоохладители. Серию воздухоохладителей целесообразно проектировать в виде ряда секций, каждая из которых рассчитывается не на одну определенную нагрузочную мощность $P_{ср}$, а на некоторый диапазон мощностей $P_{мин} — P_{макс}$. В противном случае серия должна содержать достаточно большое количество секций с малым шагом по шкале мощностей от одной секции к другой. Если этого не сделать, то выбираемые в практике проектирования электрических машин воздухоохладители каких-либо промежуточных мощностей будут иметь значительно больший вес и стоимость по сравнению с охладителями, специально спроектированными на заданные нагрузки. Таким образом, нагрузочную характеристику всей серии рационально представить в виде семейства кривых, в котором мощности отдельных охладителей заданы как функции какого-либо одного или целой группы параметров в выбранном интервале изменения этих параметров (рис. 13-14).

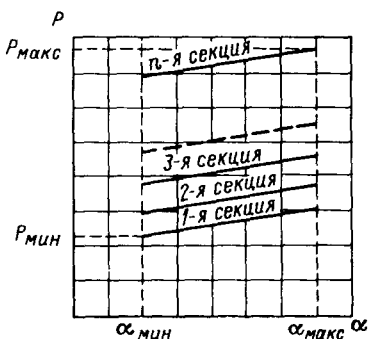


Рис. 13-14. Характеристика серии

Режим работы воздухоохладителя описывается системой уравнений:

$$P = mkf_a r_p r_s L \frac{\Theta_a - \Theta_w}{\ln \left(1 + \frac{\Theta_a - \Theta_w}{\Delta\Theta} \right)} ; \quad (13-16)$$

$$P = a c_{pa} \Theta_a \omega_a L r_p ; \quad (13-17)$$

$$P = b S_w c_{pw} \omega_w \frac{r_p r_s}{n_w} . \quad (13-18)$$

Здесь приняты следующие обозначения: m — коэффициент запаса теплопередачи; k — коэффициент теплопередачи, определяемый экспериментально как функция двух параметров, $\text{квт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$; ω_w — скорость воды, $\text{м}/\text{сек}$; ω_a — скорость воздуха, $\text{м}/\text{сек}$; f_a — поверхность 1 м трубки со стороны обребнения, м^2 ; r_p — число трубок в ряду; r_s — число рядов (по ходу воздуха) трубок; L — активная длина трубки, м ; Θ_a — разность температур нагретого и охлаждающего воздуха, град ; Θ_w — разность температур холодной и нагретой воды, град ; $\Delta\Theta$ — разность температур холодной воды и охлажденного воздуха, град ; a — расстояние между трубками в ряду, м ; c_{pa} — удельная объемная теплоемкость при постоянном давлении, $\text{квт} \cdot \text{сек}/(\text{м}^3 \cdot \text{град})$;

b — коэффициент приведения к одной системе единиц; S_w — поперечное сечение трубки по внутреннему диаметру, $см^2$; c_{pw} — удельная теплоемкость воды при температуре $25^\circ C$ и постоянном давлении, $ккал/(дм^3 \cdot град)$; n_w — число ходов воды в охладителе.

Как видно, в эти три уравнения входят четыре неизвестных размера охладителя r_p , r_s , L , n_w и пять параметров режима ω_a , ω_w , Θ_a , Θ_w , $\Delta\Theta$, для которых из технических условий эксплуатации известны либо величины этих параметров, либо диапазон их значений.

Считая все параметры заданными, решим уравнения относительно неизвестных размеров охладителя. При этом можно сразу же заметить, что число ходов охладителя n_w обычно бывает четным (2, 4, 6 и 8). Таким образом, серия может быть построена на базе трех размеров секций, полученных из решения системы, причем число возможных решений будет определено числом возможных чисел ходов.

Из (13-16) получим:

$$r_s = \frac{P \ln \left(1 + \frac{\Theta_a - \Theta_w}{\Delta\Theta} \right)}{mkf_{a'p} L (\Theta_a - \Theta_w)} = \frac{P}{\Theta_a r_p L} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Theta_a - \Theta_w}{\Delta\Theta} \right)}{mkf_a \left(1 - \frac{\Theta_w}{\Theta_a} \right)}.$$

Заменим в полученном выражении величину P ее значением по (13-17); тогда получим:

$$r_s = \frac{ac_{pa}\omega_a \ln \left(1 + \frac{\Theta_a + \Theta_w}{\Delta\Theta} \right)}{mkf_a \left(1 - \frac{\Theta_w}{\Theta_a} \right)}.$$

Совместное решение (13-17) и (13-18) может быть записано в виде:

$$\frac{r_s}{Ln_w} = \frac{ac_{pa}}{bc_{pw}S_w} \frac{\Theta_a}{\Theta_w} \frac{\omega_a}{\omega_w}.$$

Назовем правую часть последнего выражения характеристикой режима и обозначим ее через β ; тогда $r_s/(Ln_w) = \beta$, или $L = r_s/(\beta n_w)$, т. е. при определенном числе рядов r_s величина L для заданного режима $\beta = \text{const}$ будет определяться выбранным числом ходов воды n_w .

Полученное решение исходной системы уравнений позволяет сделать следующие выводы.

1. Число рядов трубок охладителя r_s однозначно определяется выбранным режимом процесса теплообмена и скоростями теплоносителей ω_a и ω_w . Наоборот, если принятое в конструкции охладителя произвольное число рядов не соответствует скоростям теплоносителей, то неизбежны отклонения параметров режима от их номинальных (расчетных) значений.

2. Длина трубок охладителя L для избранного режима не может быть взята произвольно: она однозначно определяется принятым числом ходов воды n_w .

3. Варьирование размеров охладителя для заданного режима при принятом числе ходов воды может быть осуществлено только за счет одного его размера, а именно за счет числа трубок в ряду r_p .

Эти выводы справедливы не только для воздухоохладителей электрических машин, но и для других теплообменников.

Вернемся к рассмотрению параметров процесса теплообмена. Выше было указано, что их значения определяются условиями проектирования. Так например, для воздухоохладителей электрических машин средние значения параметров Θ_a и $\Delta\Theta$ составляют соответственно 20 и 10°С. Что же касается скоростей теплоносителей ω_a и ω_w , то их нижние (минимальные) значения определяются критическими числами Рейнольдса, т. е. условием турбулентности движения: $\omega_{a \text{ мин}} = 2,0$ м/сек; $\omega_{w \text{ мин}} = 0,8$ м/сек.

Выбор верхних (максимальных) значений величин ω_a и ω_w определяется допустимыми значениями падения напора, а также тем, что при больших значениях скоростей коэффициенты теплопередачи сравнительно мало изменяются. В частности, для воздухоохладителей электрических машин $\omega_{a \text{ макс}} = 4,5$ м/сек, $\omega_{w \text{ макс}} = 2,0$ м/сек.

Остается рассмотреть величину еще одного параметра — подогрева воды в охладителе Θ_w . В подавляющем большинстве воздухоохладителей электрических машин подогрев воды составляет 10—15% подогрева воздуха, не превосходя по абсолютному значению 3°С. Поэтому при проектировании серии целесообразно принимать за Θ_w значения 2,5—3°С. При этом следует иметь в виду, что повышение разности температуры Θ_w , снижая необходимые расходы воды, одновременно приводит к увеличению размеров охладителей.

Необходимо добавить, что расход воздуха через охладитель электрической машины, а следовательно, и скорость при фиксированных размерах задаются самой машиной. Соответствие этого расхода скоростям воздуха, предусмотренным в серии, обеспечивается тем, что при проектировании серии в расчет вводится диапазон подогревов воздуха, целиком перекрывающий соответствующий диапазон, применяемый при проектировании машин.

Мощность охладителя как функция двух параметров может быть представлена в виде двух эквивалентных друг другу семейств кривых (рис. 13-15).

При проектировании серии, для однозначности решения, целесообразно ввести дополнительную связь между параметрами ω_a и ω_w , именно закон прямой пропорциональности $\omega_a = C\omega_w$.

Действительно, рассматривая минимальные и максимальные значения обоих параметров, нетрудно заметить, что диапазоны

изменения каждого из них, выраженные в относительных единицах, очень близки друг к другу $\omega_{a \text{ макс}}/\omega_{a \text{ мин}} = \omega_w \text{ макс}/\omega_w \text{ мин}$.

С другой стороны, равномерное изменение, например увеличение, скорости одного из теплоносителей при одновременном аналогичном изменении скорости другого теплоносителя приво-

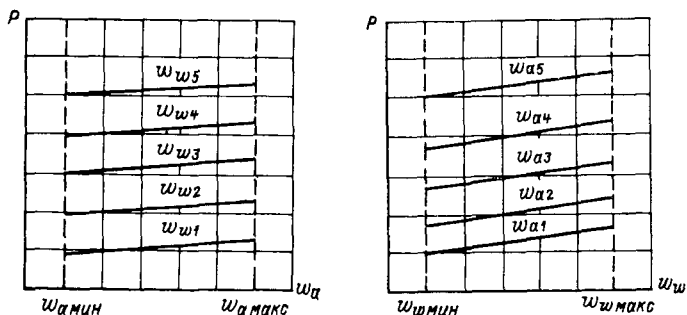


Рис. 13-15. Зависимость мощности от скорости охлаждающих сред

дит к планомерной интенсификации процесса теплообмена, при которой его параметры (в частности, коэффициент теплопередачи) последовательно принимают все возможные значения от наименьших до наибольших.

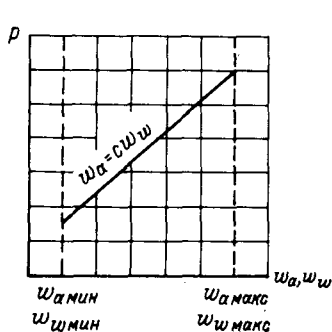


Рис. 13-16. Мощность как функция скорости одного теплоносителя

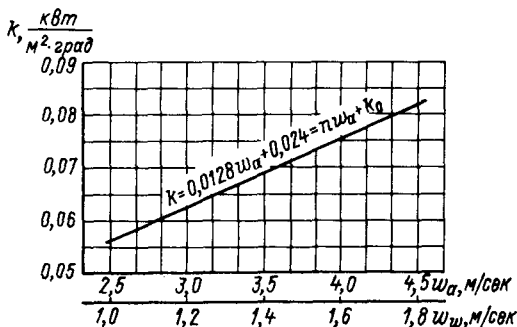


Рис. 13-17. Коэффициенты теплопередачи

Сделанное допущение позволяет однозначно определить мощность секций охладителя в функции скорости одного из теплоносителей, например воздуха, причем скорость другого теплоносителя — воды — будет автоматически задана (в другом масштабе) для всех значений избранного аргумента (рис. 13-16).

Добавим еще, что, приняв в качестве закона проектирования пропорциональное измерение скоростей ω_a и ω_w , можно для

случая воздухоохлаждателей электрических машин в выражении для определения числа рядов исключить скорость воздуха.

Дело в том, что при одновременном увеличении скоростей воздуха и воды коэффициент теплопередачи растет приблизительно пропорционально каждой из этих скоростей:

$$k = n'w_a + k_0 \approx nw_a,$$

так как в рассматриваемом диапазоне k_0 невелико по сравнению с k . Отсюда получаем:

$$r_s = \frac{ac_{pa} \ln \left(1 + \frac{\theta_a - \theta_w}{\Delta\theta} \right)}{mnf_a \left(1 - \frac{\theta_w}{\theta_a} \right)}.$$

Таким образом, размеры охладителей в серии определяются по существу крутизной кривой коэффициента теплопередачи $k = \varphi(w_a, w_w)$ и тремя разностями температуры: θ_a , θ_w и $\Delta\theta$.

Если принять для серии согласно изложенному выше $w_a/w_w = \text{const} = 2,5$; $w_{a \text{ мин}} = 2,5$ м/сек; $w_{a \text{ макс}} = 4,5$ м/сек; $w_{w \text{ мин}} = 1,0$ м/сек; $w_{w \text{ макс}} = 1,8$ м/сек, то кривая коэффициента теплопередачи превращается в прямую, показанную на рис. 13-17. Эта прямая может быть с достаточной для определения числа рядов точностью описана уравнением $k = 0,02w_a$.

Приведем характеристики пучка. Расположение трубок — шахматное. Несущая трубка сделана из латуни; ее наружный и внутренний диаметры соответственно равны 19 и 17 мм. Оребрение алюминиевое; наружный диаметр оребрения составляет 44 мм. Расстояние между трубками в ряду $a = 0,050$ м, расстояние между рядами 0,037 м. Поверхность 1 м трубки со стороны воздуха $f_a = 0,616$ м². Сечение трубки по внутреннему диаметру $S_w = 2,27$ см². Кроме того, в расчете принято: $\Delta\theta = 10^\circ \text{C}$; $\theta_{a \text{ ср}} = 20^\circ \text{C}$; $\theta_{w \text{ ср}} = 3^\circ \text{C}$.

Теперь можно определить величину

$$r_s = \frac{0,05 \cdot 1,1 \ln \left(1 + \frac{17}{10} \right)}{0,9 \cdot 0,02 \cdot 0,616 \left(1 - \frac{3}{20} \right)} = 5,82 \approx 6.$$

Следовательно, все охладители серии должны иметь по шесть рядов трубок.

Вычислим характеристику режима:

$$\beta = \frac{0,86 \cdot 0,05 \cdot 1,1 \cdot 20 \cdot 2,5}{0,36 \cdot 2,27 \cdot 1,3} = 0,97 \approx 1,0.$$

Если не вводить принятого допущения $w_a = Cw_w$, то характеристика режима β окажется величиной переменной, зависящей от отношения w_a/w_w . Диапазон ее изменения в пределах типовых

значений параметров ω_a и ω_w окажется равным $\beta = 0,54 \div 1,74$ и $\beta_{ср} = 1,14$.

Приведем возможные длины трубок для разных чисел ходов:

Число ходов	2	4	6	8
Длина трубки, м . . .	3	1,5	1,0	0,75

Для серии в качестве рабочих приняты длины 1,0; 1,5; 2,5 м при числах ходов соответственно 6; 4 и 2.

Теперь остается путем варьирования числа трубок в ряду определить необходимое число секций, которые целиком перекрывают бы требуемый диапазон мощностей 50—250 квт. В результате расчета получаем таблицу секций (табл. 13-1). Порядок расчета следующий:

$$P = \alpha \Delta \Theta; \quad \alpha = \frac{e^{mkF_a \gamma} - 1}{\gamma}; \quad \gamma = \frac{0,91}{Q_a} - \frac{0,86}{Q_w};$$

$$Q_a = \omega_a L a r_p; \quad Q_w = \omega_w \frac{r_s r_p S_w 0,36}{n_w};$$

$$F = f_a L r_p r_s.$$

Таблица 13-1

L, м	r _p , шт.	P _{мин} , квт	P _{макс} , квт	L, м	r _p , шт.	P _{мин} , квт	P _{макс} , квт
1,0	8	26,3	34,6	1,5	18	93,1	120,0
1,0	10	33,4	43,6	1,5	20	103,1	133,8
1,0	12	40,4	58,2	1,5	22	114,0	148,0
1,0	14	47,4	61,6	1,5	24	124,3	161,0
1,0	16	54,1	70,4	1,5	26	135,5	175,0
1,0	18	61,0	79,4	1,5	28	147,4	188,5
1,0	20	67,0	87,1	1,5	30	155,5	202,0
1,5	8	40,0	52,4	2,5	16	139,2	181,0
1,5	10	50,7	66,0	2,5	16	158,0	203,0
1,5	12	61,2	79,4	2,5	20	104,5	134,0
1,5	14	71,7	93,0	2,5	22	194,0	249,0
1,5	16	82,2	106,3				

Таблица 13-2

Номер секции	L, м	n _ш , шт.	r _p , шт.	P _{мин} , квт	P _{макс} , квт	Θ _{а мин} , град	Θ _{а макс} , град	Θ _{ω мин} , град	Θ _{ω макс} , град	Δ Θ _{мин} , град	Δ Θ _{макс} , град
1	1,0	6	16	54,1	70,4	17,2	23,8	2,56	3,5	16,3	18,4
2	1,5	4	16	82,6	107,0	17,5	24,3	2,61	3,65	16,4	18,4
3	1,5	4	22	114,0	148,0	17,7	24,7	2,63	3,65	16,5	18,6
4	2,5	2	16	139,2	181,0	17,7	24,7	2,21	3,08	16,6	18,8
5	2,5	2	22	194,0	249,0	17,9	25,1	2,22	3,12	16,6	18,9

Из табл. 13-1 можно отобрать (стремясь получить минимальное число трубных досок) пять охладителей, удовлетворяющих поставленной задаче. Приведем для них значения параметров режима теплопередачи и некоторые другие характеристики (табл. 13-2 и рис. 13-18).

Более подробные данные о серии приведены в приложении 3.

Газоохладители. Изменение коэффициентов теплоотдачи газоохладителей в зависимости от давления водорода с удовлетворительной точностью описывается уравнением:

$$k = k'_0 p^{0,6},$$

где k'_0 — коэффициент теплопередачи воздухоохладителя данной конструкции при условии, что скорость потока воздуха равна скорости потока водорода и скорости воды также равны между собой; p — абсолютное давление водорода внутри корпуса турбогенератора, атм.

В остальных чертах проектирование газоохладителей ничем не отличается от проектирования воздухоохладителей.

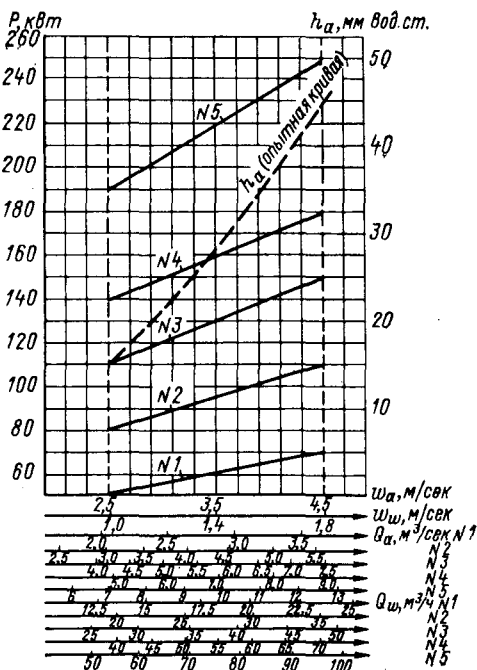


Рис. 13-18. Параметры серии воздухоохладителей

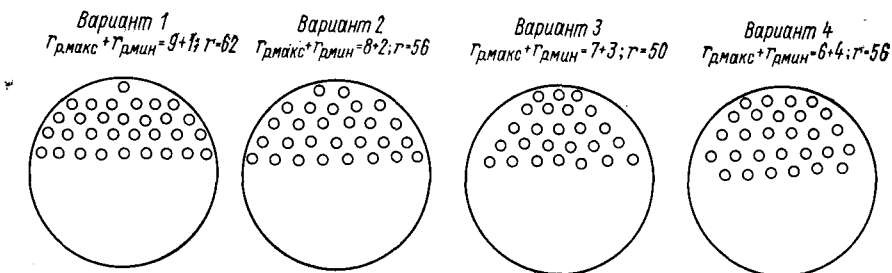


Рис. 13-19. Варианты компоновки круглого теплообменника

Водо-водяные теплообменники имеют, как правило, круглое сечение. При компоновке круглого теплообменника число рядов трубок r_s , число ходов воды n_w , суммарное число трубок r и их

длина L должны быть сохранены, а число трубок в ряду следует рассматривать как среднее число трубок в ряду в поперечном сечении теплообменника:

$$r_p = \frac{r_{p. \text{ макс}} + r_{p. \text{ мин}}}{2}.$$

Если, например, $r_p = 5$, то

$$r_{p. \text{ макс}} + r_{p. \text{ мин}} = 10,$$

т. е. в круглом теплообменнике возможны четыре варианта компоновки (рис. 13-19). Из этих вариантов следует отобрать наиболее рациональный.

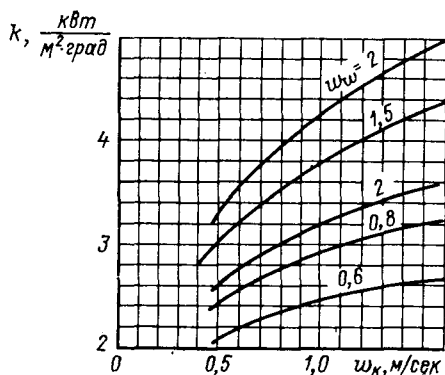


Рис. 13-20. Коэффициенты теплопередачи водо-водяного теплообменника

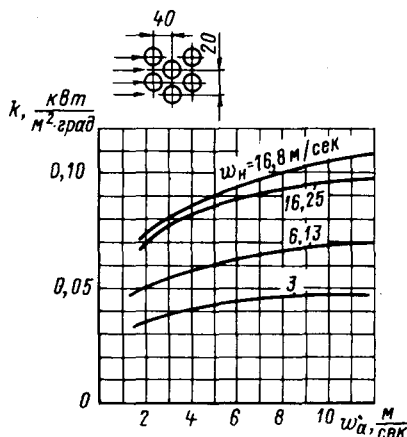


Рис. 13-21. Коэффициенты теплопередачи воздухо-воздушного охладителя

Кривые коэффициентов теплопередачи в зависимости от скоростей воды ω_w и конденсата ω_k приведены на рис. 13-20.

Воздухо-воздушные теплообменники. Этот тип теплообменников применяется в закрытых обдуваемых асинхронных двигателях. Кривые коэффициентов теплопередачи приведены на рис. 13-21.

Теплообменник располагается на кронштейнах верхней части корпуса машины (рис. 13-22). При таком расположении максимальная длина трубок теплообменника ограничена габаритной длиной машины.

Кроме того, охладитель разбивается на две части по ходу внутреннего воздуха. Каждая из двух частей имеет число рядов трубок $r_s/2$ и длину $l=L/2$, где L — габаритная длина корпуса машины.

Одна из частей охладителя, в свою очередь, подразделяется на два участка с длиной трубок $l/2$. Участки расположены по концам машины.

Изложенная здесь методика расчета теплообменников исходит из необходимости получения оптимальных геометрических соотношений на основе заданных параметров режима теплоте-

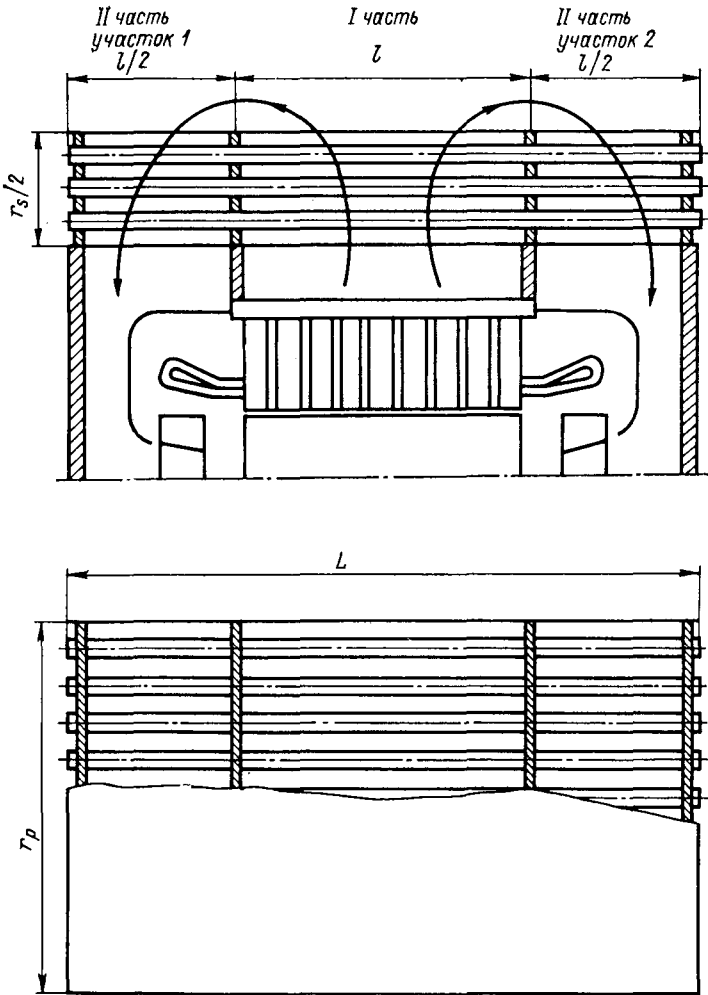


Рис. 13-22. Установка воздухо-воздушного охладителя

редачи. Такой подход оправдан для случая электрических машин, поскольку параметры процесса теплообмена в охладителях диктуются условиями эксплуатации самих машин.

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

14-1. Предварительные соображения

Непосредственным называется такой способ охлаждения электрических машин, при котором охлаждающая среда находится в прямом контакте (соприкосновении) с элементами конструкции, выделяющими тепло.

Системы непосредственного охлаждения весьма эффективны и экономичны. По этой причине они находят все более широкое применение в конструкциях электрических машин.

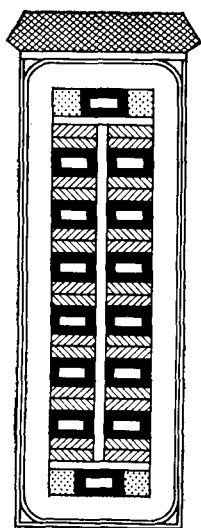


Рис. 14-1. Сечение обмотки с водяным охлаждением

Внедрение непосредственного охлаждения позволило не только резко повысить удельные нагрузки машин и увеличить их единичную мощность в достигнутых ранее предельных габаритах, но и привело к некоторым качественным изменениям процесса теплообмена, благодаря которым оказалось, в частности, возможным более достоверно производить тепловые расчеты.

Последнее обстоятельство довольно существенно. Значительно повышая использование активных материалов машины, увеличивая плотность тока и линейные нагрузки до неапробированных практикой величин, проектировщик должен располагать гарантиями надежности создаваемых конструкций. Известные методы теплового расчета систем непосредственного охлаждения в большинстве случаев обеспечивают такие гарантии.

В целях осуществления непосредственного охлаждения в элементах конструкции, выделяющих тепло, вообще говоря, выполняются каналы, по которым циркулирует охлаждающая среда. Такая конструктивная схема наиболее точно соблюдается, например, при непосредственном охлаждении обмотки статора водой, когда все или определенная часть элементарных проводников обмотки выполнены в виде полых медных трубок прямоугольного сечения (рис. 14-1).

Приведенная характеристика конструктивной схемы непосредственного охлаждения в известной мере условна. Выполнение каналов в меди обмоток или в активной стали не является обязательным. Каналы могут быть проделаны, например, в изолирующих деталях. Важно только, чтобы по крайней мере од-

ной стенкой канала служил элемент конструкции, выделяющий тепло (рис. 14-2).

Иногда при непосредственном охлаждении понятие канала оказывается еще более условным, например при охлаждении обмоток возбуждения явнополюсных синхронных машин, когда охлаждающий газ циркулирует в междуполюсном пространстве, находясь в прямом контакте с боковой поверхностью катушек обмотки (рис. 14-3).

Могут быть осуществлены и конструктивные схемы смешанного типа, в которых для охлаждения какого-либо одного активного элемента применяются каналы, различные по форме и по характеру циркуляции охлаждающей среды.

Активная сталь статора электрических машин с воздушным и газовым охлаждением всегда

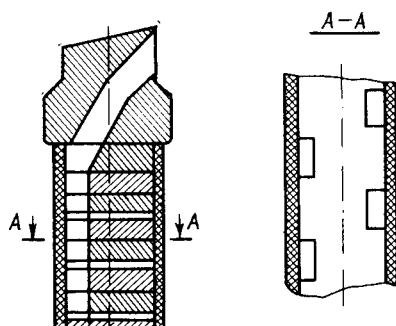


Рис. 14-2. Канал обмотки ротора турбогенератора

охлаждается непосредственно. При этом в схемах аксиальной вентиляции каналы имеют стандартизованные по длине машины

размеры (рис. 14-4). В схемах радиальной вентиляции каналы образованы вентиляционными распорками между пакетами активной стали, и их

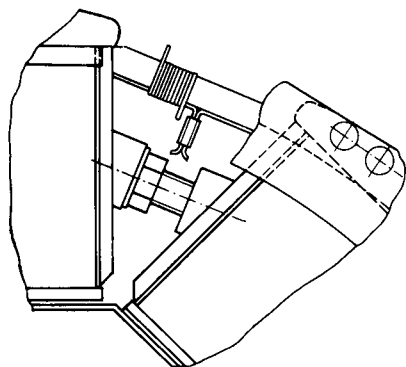


Рис. 14-3. Полюсное окно синхронной машины

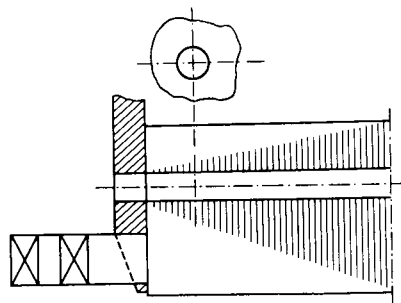


Рис. 14-4. Аксиальный вентиляционный канал в активной стали

поперечное сечение увеличивается в направлении наружного диаметра сердечника (рис. 14-5). В радиальных схемах не все, а только крайние листы пакетов стали непосредственно омываются охлаждающей средой.

Геометрические параметры охлаждающих каналов являются важной характеристикой систем непосредственного охлаждения.

Речь идет о длине, живом сечении и периметре каналов. При этом понятие геометрического периметра каналов не всегда оказывается достаточным. Так, например, в гидравлических расчетах при определении гидравлического диаметра каналов применяется понятие смоченного периметра. Смоченным называется часть геометрического периметра, которая находится в контакте с циркулирующей в каналах средой. В практике охлаждения электрических машин смоченные и геометрические периметры, как правило, тождественны, но в отдельных случаях они различаются (рис. 14-6).

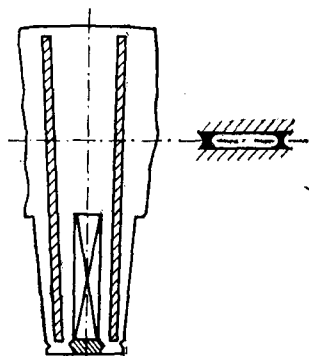


Рис. 14-5. Радиальный вентиляционный канал

В тепловых расчетах бывает необходимо употреблять понятие эффективного периметра. Эффективным называется часть смоченного периметра, которая выделяет тепло в канал.

Отличие смоченного и эффективного периметров от геометрического иллюстрируется на рис. 14-7, на котором представлена конструкция охлаждающего канала.

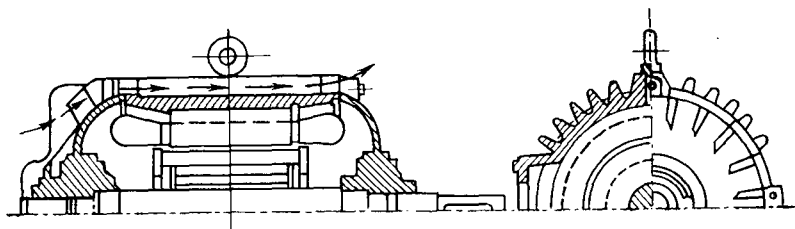
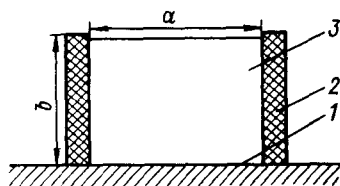


Рис. 14-6. Каналы на поверхности обдуваемой машины

В дальнейшем, в тех конкретных случаях, когда понятие эффективного или смоченного периметра будет совпадать с по-

Рис. 14-7. Условный охлаждающий канал электрической машины

1 — омываемая поверхность активного элемента, выделяющего тепло; 2 — изоляционные стенки канала, не участвующие в теплообмене; 3 — охлаждающая среда. Геометрический периметр канала $P = 2a + 2b$; смоченный периметр канала $P_c = a + 2b$; эффективный периметр канала $P_э = a$



нятием геометрического, будем применять выражение периметр, не оговаривая особо тождественность указанных терминов,

14-2. Тепловой расчет проводника с током

Рассмотрим полый проводник с током, в канале которого циркулирует охлаждающая среда (рис. 14-8). Примем, что расположенные поблизости другие проводники имеют по концам (на входе и выходе каналов) ту же температуру, что и рассматриваемый. Иными словами, условимся, что в схеме охлаждения наблюдается тепловая симметрия и продольный теплообмен на концах проводника отсутствует.

Примем также, что все выделенные в проводнике потери отводятся охлаждающей средой в канале. Физические параметры охлаждающей среды, т. е. удельный вес, теплоемкость, теплопроводность и вязкость, будем считать постоянными и равными их значениям при средней температуре среды. Пренебрежем также изменением давления охлаждающей среды при ее движении вдоль по каналу. Тогда и коэффициент теплообмена окажется величиной неизменной. Анализ сделанных допущений дается в дальнейшем.

Будем считать, что удельные потери p , выделяемые в единице объема проводника, при температуре охлаждающей среды на входе в канал равны p_0 , и их зависимость от температуры определяется соотношением:

$$p = p_0 (1 + \beta \vartheta_n), \text{ вт/м}^3,$$

где ϑ_n — превышение температуры проводника в рассматриваемом сечении над температурой охлаждающей среды при входе в канал, град; β — температурный коэффициент, град⁻¹.

Определим другие обозначения: ϑ_c — превышение температуры охлаждающей среды в рассматриваемом сечении над ее температурой при входе в канал, град; Π — эффективный периметр канала, м; S — сечение проводника, м²; Q — расход охлаждающей среды через канал, м³/сек; c — удельная объемная теплоемкость охлаждающей среды, вт·сек/(м³·град) [$c = 4,19 c_p \gamma$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении, ккал/(кг·град)]; λ — коэффициент теплопроводности проводника, вт/(м·град); α — коэффициент теплообмена, вт/(м²·град).

Рассмотрим процесс теплообмена на длине проводника dx за сечением x , считая от начала, т. е. на участке $x, x+dx$. Сформулируем условие теплового баланса для рассматриваемого элемента: выделенное в элементе за время dt тепло dP равно сумме тепла dP_λ , отведенного из элемента за счет теплопроводности, и тепла dP_α , отведенного за счет теплообмена:

$$dP = dP_\lambda + dP_\alpha. \quad (14-1)$$

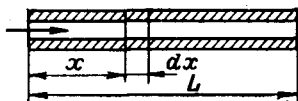


Рис. 14-8. Полый проводник с током

В единицу времени в элементе проводника выделяется количество тепла

$$dP = p_0(1 + \beta\vartheta_n) dV = p_0(1 - \beta\vartheta_n) S dx,$$

где dV — объем элемента проводника.

Тепло dP_λ , отведенное из элемента за счет теплопроводности, равно разнице между теплом, поступившим через грань $x+dx$, и теплом, ушедшим через грань x .

Согласно закону теплопроводности Фурье тепловой поток через грань x

$$P_{\lambda, x} = -\lambda S \frac{d\vartheta_n}{dx};$$

через грань $x+dx$ передается тепло

$$P_{\lambda, x+dx} = -\lambda S \frac{d}{dx} (\vartheta_n + d\vartheta_n) = -\lambda S \left(\frac{d\vartheta_n}{dx} + \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} \right).$$

Тогда отведенное из элемента за счет теплопроводности тепло

$$dP_\lambda = P_{\lambda, x+dx} - P_{\lambda, x} = -\lambda S \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} = -\lambda S \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} dx.$$

Знак минус в выражении потока dP_λ объясняется тем, что поток направлен в сторону уменьшения температуры, противоположную положительному направлению оси x .

Определим теперь тепло dP_α , отведенное из элемента проводника за счет теплообмена. Очевидно, в соответствии с законом теплообмена Ньютона

$$dP_\alpha = \alpha (\vartheta_n - \vartheta_c) P dx.$$

Теперь условие теплового баланса (14-1) запишется в виде:

$$p_0 S (1 + \beta\vartheta_n) dx = \alpha (\vartheta_n - \vartheta_c) P dx - \lambda S \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} dx.$$

Разделим полученное уравнение на величину объема рассматриваемого элемента $dV = S dx$; тогда получим:

$$p_0(1 + \beta\vartheta_n) = \frac{P}{S} \alpha (\vartheta_n - \vartheta_c) - \lambda \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2}. \quad (14-2)$$

Мы получили уравнение Пуассона для случая установившегося одномерного течения с охлаждением.

Рассмотрим теперь воздействие воспринятого потока на параметры охлаждающей среды. Все тепло, перешедшее на уча-

стке $x, x+dx$ в охлаждающую среду, идет на повышение ее теплосодержания:

$$\alpha (\vartheta_{\text{п}} - \vartheta_{\text{с}}) \Pi dx = Qcd\vartheta_{\text{с}}. \quad (14-3)$$

В результате имеем систему уравнений (14-2) и (14-3). Подставляя второе уравнение в первое, получаем основное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\rho_0 S (1 + \beta \vartheta_{\text{п}}) + \lambda S \frac{d^2 \vartheta_{\text{п}}}{dx^2} = cQ \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx}. \quad (14-4)$$

Для отыскания решения уравнения (14-4) избавимся в нем от одной из двух неизвестных функций, для чего вместо переменной $\vartheta_{\text{п}}$ и ее производных подставим их значения, полученные из (14-3). Будем иметь:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{п}} &= \frac{cQ}{\alpha \Pi} \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx} + \vartheta_{\text{с}}; \\ \frac{d\vartheta_{\text{п}}}{dx} &= \frac{cQ}{\alpha \Pi} \frac{d^2 \vartheta_{\text{с}}}{dx^2} + \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx}; \\ \frac{d^2 \vartheta_{\text{п}}}{dx^2} &= \frac{cQ}{\alpha \Pi} \frac{d^3 \vartheta_{\text{с}}}{dx^3} + \frac{d^2 \vartheta_{\text{с}}}{dx^2}. \end{aligned}$$

После соответствующей подстановки уравнение (14-4) переписывается в виде:

$$\rho_0 S \left(1 + \beta \frac{cQ}{\alpha \Pi} \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx} + \beta \vartheta_{\text{с}} \right) + \lambda S \frac{cQ}{dx^3} + \lambda S \frac{d^2 \vartheta_{\text{с}}}{dx^2} = cQ \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx},$$

или после очевидных упрощений

$$\frac{d^3 \vartheta_{\text{с}}}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 \vartheta_{\text{с}}}{dx^2} + a_2 \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx} + a_3 \vartheta_{\text{с}} = -\frac{a_3}{\beta}. \quad (14-5)$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\alpha \Pi}{cQ} = a_1; \quad \frac{\rho_0 \beta S - \alpha \Pi}{\lambda S} = a_2; \quad \frac{\rho_0 \beta \alpha \Pi}{\lambda cQ} = a_3.$$

Как видим, полученное дифференциальное уравнение теплообмена в полом проводнике с током является неодородным линейным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, не зависящей от аргумента x . Аргументом уравнения является переменная длина канала, искомой функцией — превышение температуры охлаждающей среды.

Прежде чем приступить к решению уравнения (14-5), заметим, что на основе этого решения может быть получено превышение температуры проводника в любом сечении, если воспользоваться дополнительно уравнением (14-3), в соответствии с которым

$$\vartheta_{\text{п}} = \vartheta_{\text{с}} + \frac{1}{a_1} \frac{d\vartheta_{\text{с}}}{dx}.$$

Запишем теперь характеристическое уравнение однородной части дифференциального уравнения (14-5) в виде:

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0. \quad (14-6)$$

Тогда в случае действительных корней характеристического уравнения (14-6) общее решение уравнения (14-5) будет иметь вид:

$$\vartheta_c = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + C_4, \quad (14-7)$$

где k_1 , k_2 и k_3 — корни характеристического уравнения; C_1 , C_2 и C_3 — постоянные интегрирования; C_4 — частное решение неоднородного уравнения (14-5).

Так как частное решение есть величина постоянная, оно равно $C_4 = \frac{1}{\beta}$.

В случае когда два корня характеристического уравнения являются числами комплексно-сопряженными, общее решение уравнения (14-5) будет иметь вид:

$$\vartheta_c = C_1' e^{k_1 x} + C_2' e^{\mu x} \cos \nu x + C_3' e^{\mu x} \sin \nu x + C_4, \quad (14-8)$$

где k_1 — первый (действительный) корень характеристического уравнения; $k_2 = \mu + \nu i$ и $k_3 = \mu - \nu i$ — соответственно второй и третий (комплексно сопряженные) корни.

Для отыскания постоянных интегрирования рассмотрим граничные условия.

Учтем, во-первых, что подогрев среды ϑ_c при входе в канал равен нулю, т. е. при $x=0$ $\vartheta_c=0$.

Во-вторых, воспользуемся сформулированными выше условиями тепловой симметрии, т. е. тем фактом, что на концах проводника не происходит продольный теплообмен и, следовательно, градиент температуры проводника равен нулю; тогда получим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \\ \text{при } x=L \end{array} \right\} \frac{d\vartheta_c}{dx} = \frac{d\vartheta_c}{dx} + \frac{1}{a_1} \frac{d^2\vartheta_c}{dx^2} = 0.$$

Подстановка этих условий в уравнения (14-7) и в его производные по x в случае действительных корней характеристического уравнения приводит к следующей системе уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{1}{\beta};$$

$$C_1 k_1 \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right) + C_2 k_2 \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right) + C_3 k_3 \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right) = 0; \quad (14-9)$$

$$C_1 k_1 e^{k_1 L} \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right) + C_2 k_2 e^{k_2 L} \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right) + C_3 k_3 e^{k_3 L} \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right) = 0.$$

Отсюда искомые постоянные равны:

$$C_1 = \frac{1}{\beta} \frac{A_{23}}{A_{12} + A_{23} + A_{31}}; \quad C_2 = \frac{1}{\beta} \frac{A_{31}}{A_{12} + A_{23} + A_{31}}; \\ C_3 = \frac{1}{\beta} \frac{A_{12}}{A_{12} + A_{23} + A_{31}},$$

где введены обозначения.

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= k_1 k_2 \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right) (e^{k_1 L} - e^{k_2 L}); \\ A_{23} &= k_2 k_3 \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right) (e^{k_2 L} - e^{k_3 L}); \\ A_{31} &= k_3 k_1 \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right) (e^{k_3 L} - e^{k_1 L}). \end{aligned} \right\} \quad (14-10)$$

Если два корня характеристического уравнения — числа комплексно-сопряженные, то система уравнений относительно постоянных интегрирования будет иметь вид [64]:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 + C'_2 &= \frac{1}{\beta}; \\ C'_1 A + C'_2 B + C'_3 D &= 0; \\ C'_1 G + C'_2 M + C'_3 N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14-11)$$

В этих уравнениях введены обозначения:

$$A = k_1 + \frac{k_1^2}{a_1}; \quad B = \frac{\mu^2}{a_1} - \frac{v^2}{a_1} + \mu; \quad D = \frac{2\mu v}{a_1} + v;$$

$$G = k_1 e^{k_1 L} + \frac{k_1^2}{a_1} e^{k_1 L};$$

$$M = \frac{\mu^2}{a_1} e^{\mu L} \cos vL - \frac{2}{a_1} \mu v e^{\mu L} \sin vL - \frac{v^2}{a_1} e^{\mu L} \cos vL + \\ + \mu e^{\mu L} \cos vL - v e^{\mu L} \cos vL = e^{\mu L} (B \cos vL - D \sin vL);$$

$$N = \frac{\mu^2}{a_1} e^{\mu L} \sin vL + \frac{2}{a_1} \mu v e^{\mu L} \cos vL - \frac{v^2}{a_1} e^{\mu L} \sin vL + \\ + \mu e^{\mu L} \sin vL + v e^{\mu L} \cos vL = e^{\mu L} (B \sin vL + D \cos vL)$$

При принятых обозначениях постоянные интегрирования равны:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 &= \frac{1}{\beta} \frac{BN - DM}{BN + DG - MD - AN}; \\ C'_2 &= \frac{1}{\beta} \frac{DG - AN}{BN + DG - MD - AN}; \\ C'_3 &= \frac{1}{\beta} \frac{AM - BG}{BN + DG - MD - AN}. \end{aligned} \right\} \quad (14-12)$$

Как видим, полученные решения весьма громоздки. По этой причине целесообразно проанализировать пути их упрощения. Проделаем это для наиболее часто встречающегося случая вещественных корней характеристического уравнения.

Прежде всего обращает на себя внимание то, что два из трех корней (14-6) k_1 и k_2 значительно превосходят по абсолютной величине третий корень этого же уравнения k_3 . Указанный факт позволяет сделать два практических вывода. Во-первых, для приближенного нахождения корней $k_{1,2}$ можно воспользоваться квадратным уравнением $k^2 + a_1k + a_2 = 0$. Кроме того, в общем решении (14-7) можно пренебречь величинами второго порядка малости, что практически не отразится на точности вычислений. Если обозначить через k_1 отрицательный корень характеристического уравнения и через k_2 — положительный, решение будет иметь вид:

$$\vartheta_c = \frac{1}{\beta} (C_1^* e^{k_1 x} + C_2^* e^{k_2(x-L) + k_3 L} + C_3^* e^{k_3 x} - 1);$$

$$C_1^* = \frac{A_{23}^*}{A_{12}^* + A_{23}^*}; \quad C_2^* = \frac{A_{31}^*}{A_{12}^* + A_{23}^*}; \quad C_3^* = \frac{A_{12}^*}{A_{12}^* + A_{23}^*};$$

$$A_{12}^* = -k_1 k_2 \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right);$$

$$A_{23}^* = k_2 k_3 \left(1 + \frac{k_2}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right);$$

$$A_{31}^* = k_3 k_1 \left(1 + \frac{k_3}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k_1}{a_1}\right).$$

Анализ тепловых расчетов непосредственно охлаждаемых проводников показывает также, что ошибка в вычислениях в большинстве случаев весьма невелика, если допустить при составлении уравнения процесса, что тепловыделение в проводниках не зависит от температуры. При этом следует считать, что удельное сопротивление проводников равно их удельному сопротивлению при средней температуре, оцениваемой предварительно. Тогда $p = p_0 = \text{const}$, и уравнение процесса не содержит искомой функции ϑ_c , что позволяет снизить его порядок на один, произведя почленное интегрирование:

$$\frac{d^3 \vartheta_c}{dx^3} + \gamma_1 \frac{d^2 \vartheta_c}{dx^2} - \gamma_2 \frac{d \vartheta_c}{dx} + \rho = 0;$$

$$\vartheta_c = C_1^0 e^{r_1 x} + C_2^0 e^{r_2 x} + \frac{\rho}{\gamma_2} x + C_3^0;$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha \Pi}{cQ}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha \Pi}{\lambda S}; \quad \rho = \frac{p_0 \alpha \Pi}{\lambda_c Q};$$

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2 + \gamma_2};$$

$$C_1^0 = \frac{\gamma_1 \rho}{\gamma_2^2} \frac{1 - e^{r_2 L}}{e^{r_2 L} - e^{r_1 L}}; \quad C_2^0 = \frac{\gamma_1 \rho}{\gamma_2^2} \frac{1 - e^{r_1 L}}{e^{r_2 L} - e^{r_1 L}};$$

$$C_3^0 = \frac{\gamma_1 \rho}{\gamma_2^2}.$$

Пути дальнейшего упрощения решения основаны на следующем рассуждении. Общее решение (14-7) представляет сумму трех экспонент и постоянной величины. Влияние двух экспонент $C_1 e^{k_1 L}$ и $C_2 e^{k_2 x}$ сказывается, и притом весьма незначительно, лишь на концах проводника, где в большей мере проявляется выравнивающее действие теплопроводности. Таким образом, решающую роль в формировании температуры проводника играют лишь два из четырех слагаемых общего решения.

Сделанный вывод позволяет допустить в качестве упрощающей предпосылки, что влияние теплопроводности проводника пренебрежимо мало ($\lambda=0$). При этом допущении уравнение процесса принимает вид:

$$\frac{\alpha \Pi}{S} \frac{d\vartheta_c}{dx} = \rho_0 \frac{\alpha \Pi}{cQ},$$

откуда

$$\vartheta_c = \frac{\rho_0 S}{cQ} x;$$

$$\vartheta_{\text{п}} = \vartheta_c + \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\vartheta_c}{dx} = \frac{\rho_0 S}{cQ} x + \frac{\rho_0 S}{\alpha \Pi}.$$

Следовательно, при допущениях о независимости тепловыделения от температуры проводника и об отсутствии влияния его теплопроводности получаем линейное распределение температуры по длине проводника. При этом разность температуры проводника и среды на всем протяжении проводника оказывается неизменной и равной $\rho_0 S / (\alpha \Pi)$.

Определим, чему равно при сделанных допущениях максимальное превышение температуры проводника, когда $x=L$; получим:

$$\vartheta_{\text{п. макс}} = \rho_0 S \left(\frac{L}{cQ} + \frac{1}{\alpha \Pi} \right). \quad (14-13)$$

Следует особо подчеркнуть, что удельные потери ρ_0 должны быть в данном случае взяты для средней температуры проводника, определяемой предварительно. В случае большого расхождения полученной температуры и предварительно принятой необходимо выполнить расчет второго приближения.

В табл. 14-1 и на рис. 14-9 и 14-10 приведены некоторые результаты расчета по формулам (14-7), (14-8) и (14-13).

Анализ результатов расчета приводит к следующим выводам.

1. Тепловой расчет сравнительно длинных проводников, охлаждаемых непосредственно, надо производить по упрощенной формуле (14-13). При этом ошибка в определении максимального превышения температуры не превосходит одного-двух градусов, что вполне приемлемо для целей практического проектирования.

2. В случае весьма коротких каналов, охлаждаемых воздухом, который циркулирует со сравнительно небольшой скоростью (два корня характеристического уравнения комплексно-

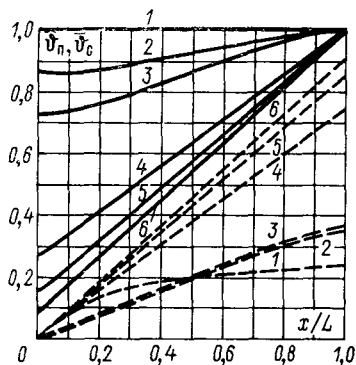


Рис. 14-9. Распределение температуры по длине проводника

Сплошные линии — $\bar{\vartheta}_n$, штриховые — $\bar{\vartheta}_c$

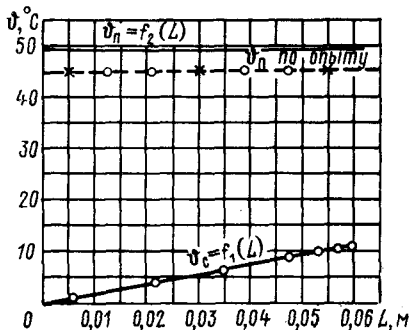


Рис. 14-10. Температура проводников с короткими каналами

сопряженные), влияние теплопроводности проводника оказывается весьма значительным. Максимальное превышение температуры проводника в этом случае практически не отличается от среднего (рис. 14-10). Использование упрощенной формулы и здесь целесообразно, но она должна применяться в форме, учитывающей выравнивание температуры по длине канала:

$$\vartheta'_{\text{п. макс}} = p_0 S \left(\frac{L}{2cQ} + \frac{1}{\alpha\Pi} \right).$$

3. Допущения, принятые при составлении дифференциального уравнения процесса теплообмена, практически не отразятся на результатах расчета, поскольку влияние более существенных допущений оказалось весьма незначительным.

Следует еще добавить, что в случае длинных каналов, когда энергия, затрачиваемая на циркуляцию охлаждающей среды, сравнительно велика, потери энергии на трение о стенки каналов не приводят к повышению температуры охлаждающей среды. В соответствии с уравнением теплосодержания темпера-

Таблица 14-1

Номер кривой на рис. 14-9	Охлаждающая среда	ρ_0 , вт/м ³	L, м	w , м/сек	$\frac{c_0}{\text{дж}}$ м ³ ·град	$\Pi \cdot 10^3$, м
1	Воздух	$0,4 \cdot 10^6$	0,1	10	$1,1 \cdot 10^3$	70
2	»	$1,0 \cdot 10^6$	0,4	40	$1,1 \cdot 10^3$	35
3	Водород	$6,0 \cdot 10^6$	0,4	40	$5,5 \cdot 10^3$	35
4	»	$2,0 \cdot 10^6$	2,0	40	$5,5 \cdot 10^3$	35
5	»	$1,0 \cdot 10^6$	4,0	40	$5,5 \cdot 10^3$	35
6	Вода	$8,0 \cdot 10^6$	24,0	3	$4,19 \cdot 10^6$	35

Номер кривой на рис. 14-9	Охлаждающая среда	$\frac{\alpha_0}{\text{вт}}$ м ² ·град	Q, м ³ /сек	ϑ , град	$\vartheta_{\text{п. макс}}$, град	
					Точный расчет	Приближенный расчет
1	Воздух	70	$1 \cdot 10^{-3}$	10,9	46,3	51,8
2	»	168	$4 \cdot 10^{-3}$	27,2	71,8	78,4
3	Водород	907	$4 \cdot 10^{-3}$	32,8	88,1	89,6
4	»	907	$4 \cdot 10^{-3}$	54,5	72,7	73,3
5	»	907	$4 \cdot 10^{-3}$	54,5	64,4	63,8
6	Вода	$15 \cdot 10^3$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	45,8	54,1	50,4

тура изолированной струи газа может изменяться лишь за счет изменения скорости движения (§ 5-9).

14-3. Метод относительных единиц в тепловом расчете электрических машин с непосредственным охлаждением

Тепловой расчет электрических машин выполняется на основе применения законов теплопроводности, причем величины коэффициентов теплопроводности и теплообмена определяются экспериментально на модельных установках. В то же время достоверность тепловых расчетов всегда проверяется путем пересчетов по прототипам, т. е. путем использования результатов исследования электрических машин данного класса в условиях эксплуатации. При этом, естественно, приходится оперировать понятиями средних величин коэффициентов теплопроводности и теплообмена, относимых к машине в целом, либо к крупным конструктивным узлам. Пересчеты по прототипам позволяют корректировать численные значения ряда коэффициентов в

целях приближения результатов теплового расчета машин какой-либо определенной серии к результатам испытаний на нагревание головных образцов.

В электрических машинах с непосредственным охлаждением необходимость тепловых расчетов по прототипам становится более актуальной, а сами расчеты существенно упрощаются. Благодаря тому, что число разнотипных тепловых сопротивлений на путях основных тепловых потоков сокращается, точность предопределения максимальных превышений температуры увеличивается; с другой стороны, по этой же причине оказывается удобным применять в расчете метод относительных единиц.

Результаты сравнительных расчетов оказываются надежными при условии, что прототип рассматриваемой конструкции изготовлен и исследован. При этом существенно, что с большой точностью удастся анализировать нагревание отдельных элементов конструкции, например обмотки возбуждения или стали статора, независимо от того, является ли система охлаждения исследованной машины (назовем такую машину и режим, при котором она испытана, базовыми) в целом прототипом рассматриваемой системы или в обеих системах подобны лишь интересующие нас элементы.

Мощность электрической машины ограничена при непосредственном охлаждении допустимым максимальным превышением температуры активных частей, которое для каждого данного класса изоляции можно считать величиной постоянной.

Максимальное превышение температуры активных частей машины ϑ_m в случае их непосредственного охлаждения циркулирующей по каналам средой в первом приближении равно сумме подогрева среды ϑ_c и конвективного теплоперепада между средой и стенкой охлаждающего канала ϑ_k :

$$\vartheta_m = \vartheta_c + \vartheta_k.$$

Подогрев охлаждающей среды и конвективный теплоперепад соответственно равны:

$$\vartheta_c = \frac{P}{cQ}; \quad \vartheta_k = \frac{P}{\alpha F},$$

следовательно, максимальное превышение температуры

$$\vartheta_m = \frac{P}{cQ} + \frac{P}{\alpha F}. \quad (14-13)$$

Чтобы удержать максимальное превышение температуры на заданном уровне, при повышении мощности машины и увеличении отводимых средой потерь P необходимо, как это видно из выражения (14-13), увеличивать расход охлаждающей среды Q , коэффициент теплообмена α и поверхность охлаждения F . В случае непосредственного охлаждения газом может быть также

увеличена удельная объемная теплоемкость c путем повышения начального давления.

Для выяснения количественных соотношений удобно воспользоваться относительными величинами отводимых потерь, расхода среды, поверхности охлаждения, теплоемкости и коэффициента теплообмена. Как видно из (14-13), потери, отводимые средой, выражаются через параметры режима и конструкции следующим образом

$$P = \frac{\vartheta_M}{\frac{1}{cQ} + \frac{1}{\alpha F}}.$$

Отсюда относительные потери при изменении конструкции и режима

$$P^* = \frac{P_2}{P_1} = \frac{c_2}{c_1} \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{F_2}{F_1} \frac{\alpha_1 F_1 + c_1 Q_1}{\alpha_2 F_2 + c_2 Q_2} = c^* Q^* \alpha^* F^* \frac{\alpha_1 F_1 + c_1 Q_1}{\alpha_2 F_2 + c_2 Q_2}, \quad (14-14)$$

где индекс 1 означает базовую конструкцию и режим, индекс 2 — режим и конструкцию измененной мощности, индекс* служит признаком относительной величины параметра.

Выражение (14-14) для относительных потерь неудобно тем, что содержит не только относительные значения параметров, но и абсолютные их значения. К более удобной для анализа форме можно прийти, если составить выражение для относительной поверхности охлаждения. На основании (14-13) можно записать:

$$F = \frac{P}{\alpha \left(\vartheta_M - \frac{P}{cQ_1} \right)};$$

отсюда

$$F^* = \frac{F_2}{F_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\vartheta_{M1} - \frac{P_1}{c_1 Q_1}}{\vartheta_{M1} - \frac{P_2}{c_2 Q_2}}.$$

Так как $P / (c_1 Q_1) = \vartheta_{M1}$ есть подогрев среды базовой конструкции в базовом режиме, то после подстановки можем записать:

$$F^* = \frac{P_2}{P_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\vartheta_{M1} - \vartheta_{c1}}{\vartheta_{M2} - \frac{P_2}{c_2 Q_2}} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\frac{\vartheta_{M1}}{\vartheta_{c1}} - 1}{\frac{\vartheta_{M2}}{\vartheta_{c1}} - \frac{P_2}{P_1} \frac{Q_1}{Q_2} \frac{c_1}{c_2}} = \frac{P^*}{\alpha^*} \frac{\frac{\vartheta_{M1}}{\vartheta_{c1}} - 1}{\frac{\vartheta_{M2}}{\vartheta_{c1}} - \frac{P^*}{c^* Q^*}}.$$

Имея в виду, что отношение $\vartheta_{M1}/\vartheta_{C1}$ зависит лишь от базового режима, т. е. является величиной заданной, обозначим ее m ; тогда

$$F^* = \frac{P^*}{\alpha^*} \frac{m-1}{m\vartheta_M^* - 1} \frac{P^*}{c^*Q^*}$$

и

$$P^* = \frac{mF^*\vartheta_M^*}{\frac{m-1}{\alpha^*} + \frac{F^*}{c^*Q^*}}. \quad (14-15)$$

Таким образом, получено выражение для относительной величины отводимых потерь в функции относительных величин параметров конструкции и режима. Оно позволяет судить о возможностях системы охлаждения при тех или иных изменениях конструкции и режима.

Для полноты сопоставления необходимо также оценить относительное изменение мощности, затраченной на охлаждение, при переходе от одной системы охлаждения к другой.

Затраченная на охлаждение мощность

$$R_3 = k_1QH,$$

где H — избыток давления напорных элементов.

В свою очередь, при мало изменяющемся сечении каналов

$$H = k_2\gamma LQ^2,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности; γ — удельный вес охлаждающей среды; L — длина охлаждающего канала.

Следовательно, $P_3 = k_1k_2\gamma LQ^3$ и

$$P_3^* = \gamma^*L^*(Q^*)^3. \quad (14-16)$$

Введем понятие коэффициента качества охлаждения

$$k_k = \frac{P^*}{P_3^*}. \quad (14-17)$$

Этот коэффициент, характеризующий относительное изменение затрат мощности на охлаждение при увеличении отводимых потерь, позволяет сопоставлять различные меры интенсификации охлаждения. Проведем такое сопоставление. (При решении конкретных задач будем считать, что класс изоляционных материалов неизменен, т. е. $\vartheta_M^* = 1,0$).

Увеличение расхода среды. Расход охлаждающей среды при заданном способе охлаждения в первом приближении пропорционален мощности машины. Так, например, расход воздуха в гидрогенераторах при повышении их мощности от 50 до 225 *Мвт* возрастает соответственно от 40 до 180 *м³/сек.* Допу-

стим теперь, что необходимо дальнейшее увеличение расхода воздуха с целью увеличения за счет этого мощности возбуждения. При этом часть параметров останется неизменной:

$$F^* = 1; \quad c^* = 1; \quad \gamma^* = 1; \quad L^* = 1.$$

Предположим, что теми или иными средствами удалось увеличить расход воздуха, омывающего поверхность катушек воз-

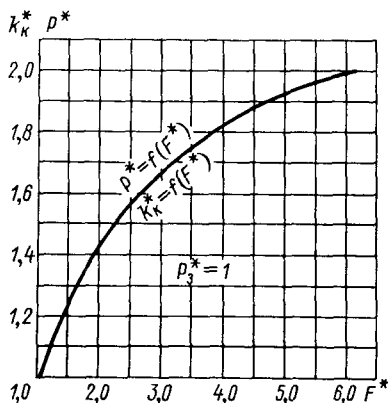
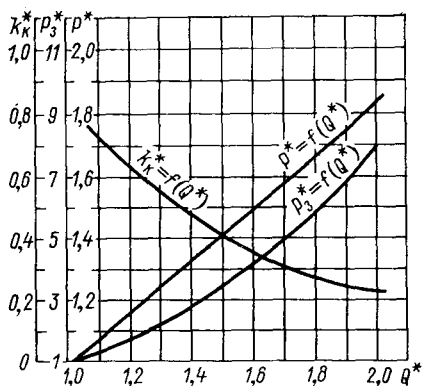


Рис. 14-11. Зависимость параметров системы от расхода среды

Рис. 14-12. Зависимости параметров от поверхности охлаждения

буждения, на 50%, т. е. $Q^* = 1,5$ и $\alpha^* = 1,5^{0,8} = 1,38$. При этом получим

$$P^* = \frac{2,4 \cdot 1}{\frac{2,4 - 1}{1,38} + \frac{1}{1 \cdot 1,5}} = 1,43;$$

$$P_3^* = 1 \cdot 1 \cdot 1,5^3 = 3,4;$$

$$k_k = \frac{1,43}{3,4} = 0,42.$$

Отсюда следует, что увеличение расхода охлаждающей среды, хотя и дает эффект в охлаждении, но приводит к заметному снижению к. п. д. машины (рис. 14-11).

Увеличение поверхности охлаждения. Иногда стремятся интенсифицировать процесс охлаждения за счет увеличения поверхности теплосъема, оставляя все прочие параметры неизменными. Так, например, известно предложение на каждый сердечник полюсов ротора гидрогенератора наматывать по две катушки обмотки возбуждения с зазором между катушками, по которому мог бы циркулировать охлаждающий воздух. Эта мера позволяет увеличить поверхность охлаждения примерно в 3—3,5 раза. Определим, во сколько раз при этом может быть увели-

чена мощность возбуждения. Условиями расчета являются: $F^* = 3,5$; $\alpha^* = 1$; $c^* = 1$; $Q^* = 1$; $\gamma^* = 1$; $L^* = 1$. При этом

$$P^* = \frac{2,4 \cdot 3,5}{\frac{2,4 - 1}{1} + \frac{3,5}{1 \cdot 1}} = 1,7;$$

$$P_3^* = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$k_k = \frac{1,7}{1,0} = 1,7.$$

Таким образом, увеличение поверхности теплосъема более рациональная, по сравнению с увеличением расхода, мера интенсификации охлаждения (рис. 14-12). Однако когда поверхность охлаждения примерно в шесть раз превосходит базовую, ее дальнейшее увеличение и связанное с ним усложнение конструкции могут оказаться мало оправданными.

Увеличение коэффициента теплообмена. В некоторых случаях целесообразно повышать скорость движения охлаждающей среды и, как следствие, коэффициенты теплообмена, не изменяя при этом расход среды и другие параметры. Так, например, в последние годы в электромашиностроении наметилась тенденция сокращать ширину вентиляционных каналов в сердечниках машин с радиальной вентиляцией. Определим эффективность этой меры.

Предположим, что ширина каналов при неизменном расходе среды уменьшена вдвое и, следовательно, скорость среды возросла также вдвое, а коэффициент теплообмена — примерно в полтора раза; тогда

$$F^* = 1; \quad \alpha^* = 1,5; \quad c^* = 1; \quad Q^* = 1; \quad \gamma^* = 1; \quad L^* = 1;$$

$$P^* = \frac{2,4 \cdot 1}{\frac{2,4 - 1}{1,5} + \frac{1}{1 \cdot 1}} = 1,25;$$

$$P_3^* = \gamma^* L^* Q^* (\omega^*)^2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^2 = 4;$$

$$k_k = \frac{1,25}{4} = 0,312.$$

Здесь в связи с существенным изменением сечения каналов в формулу для мощности должна быть введена скорость среды.

Соответствующий график для более широкого диапазона изменения коэффициента теплообмена приведен на рис. 14-13. Как видно, повышать коэффициент теплообмена при прочих неизменных параметрах выгодно лишь в тех случаях, когда затраты мощности на циркуляцию охлаждающей среды в каналах крайне незначительны.

Увеличение теплоемкости среды. При повышении давления газа внутри корпуса машины удельная объемная теплоемкость

увеличивается прямо пропорционально абсолютному давлению. При этом возрастает также коэффициент теплообмена. Рассмотрим, к чему приведет повышение давления в три раза при неизменных других условиях. При

$F^* = 1; c^* = 3; \alpha^* = 3^{0,8} = 2,42; Q^* = 1; \gamma^* = 3; L^* = 1$
имеем

$$P^* = \frac{2,0 \cdot 1}{\frac{2,0 - 1}{2,42} + \frac{1}{3 \cdot 1}} = 2,69;$$

$$P_3^* = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3; \quad k_{\kappa} = \frac{2,69}{3} = 0,896.$$

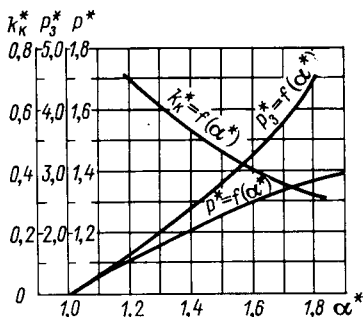


Рис. 14-13. Зависимость параметров от коэффициента теплообмена

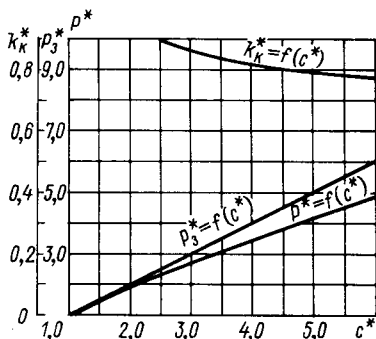


Рис. 14-14. Зависимость параметров от теплоемкости среды

Соответствующие графики приведены на рис. 14-14. Из них следует, что повышение давления газа при непосредственном охлаждении является весьма рациональной мерой.

Замена охлаждающей среды. Известно предложение охладить обмотку роторов турбогенераторов воздухом, предварительно сжатым до давления 40—50 атм. Цель предложения — избежать трудности водяного охлаждения роторов. Оставляя в стороне вопросы, не связанные с эффективностью охлаждения, сопоставим обе охлаждающие среды, приняв конструкцию ротора с водяным охлаждением за базовую; имеем:

$F^* = 1; \alpha^* = 0,23; c^* = 0,0132; Q^* = 35; \gamma^* = 0,055; L^* = 1$

$$P^* = \frac{1,005 \cdot 1}{\frac{1,005 - 1}{0,23} + \frac{1}{0,0132 \cdot 35}} = 0,46;$$

$$P_3^* = 0,055 \cdot 1 \cdot 35^2 = 2360;$$

$$k_{\kappa} = \frac{0,46}{2360} = 0,0002.$$

Как видно, сжатый воздух сравнительно мало уступает воде по своим теплоотводящим возможностям, однако осуществление охлаждения сжатым воздухом потребовало бы дополнительного расхода неоправданно большого количества энергии.

Определение предельной мощности. Под предельной, с точки зрения охлаждения, обычно понимают ту максимальную мощность, которая может быть реализована в одной машине. Как следует из предыдущего, она определяется свойствами и расходом охлаждающей среды и особенностями конструкции, в первую очередь, достижимой поверхностью охлаждения. Поскольку поверхность является функцией объема машины, задача о предельной мощности сводится по существу к задаче о предельном объеме ротора.*

Рассмотрим в качестве примера ротор турбогенератора. Для решения задачи о предельной мощности в предельном объеме обратимся к зависимостям $F=f_1(G)$ и $Q=f_2(G)$, где G — объем бочки ротора. На рис. 14-15 эти зависимости изображены графически для диапазона мощностей турбогенераторов 100—500 Мвт, причем для каждого объема взяты максимальные значения поверхности охлаждения и расхода воды. Экстраполяция кривых в зону наибольшего достижимого в ближайшие годы объема поверхности охлаждения 160 м² и расхода воды 55 л/сек.

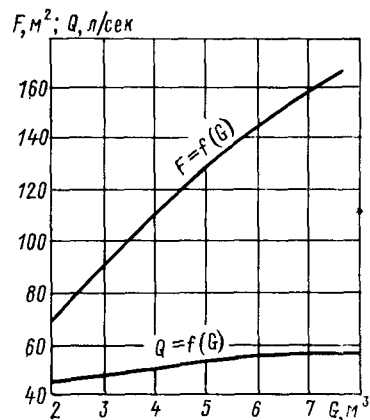


Рис. 14-15. Зависимости поверхности охлаждения и расхода воды от объема бочки ротора

Если принять теперь за прототип ротор турбогенератора мощностью 30 Мвт, считая максимальное превышение его температуры предельным, будем иметь для случая водяного охлаждения ротора предельной величины **:

$$F^* = 5,7; \quad \alpha^* = 1; \quad c^* = 1; \quad Q^* = 18,3; \quad \gamma^* = 1; \quad L^* = 0,093;$$

$$P^* = \frac{1,005 \cdot 5,7}{\frac{1,005 - 1}{1} + \frac{5,7}{1 \cdot 18,3}} = 17,9;$$

$$P_3^* = \gamma^* L^* Q^* (\omega^*)^2 = 1 \cdot 0,093 \cdot 18,3 \cdot 1 = 1,52,$$

т. е. от предельного по объему ротора могут быть отведены при водяном охлаждении потери примерно 9000 квт. Этим одно-

* При увеличении мощности электрической машины с непосредственным охлаждением лимитирующим элементом конструкции является ротор.

** Здесь за длину канала принята длина одного витка.

значно определяется предельная мощность турбогенератора, которая может быть реализована в достижимых габаритах без нарушения тепловых ограничений машины.

14-4. Выбор длины охлаждающих каналов

При непосредственном охлаждении активных частей электрических машин преимущества коротких каналов перед длинными очевидны. Укорочение каналов позволяет при тех же затратах мощности охладить машину до более низкой температуры или при необходимости охлаждения до определенной температуры расходовать на охлаждение меньшую мощность. Однако технические возможности выполнения коротких каналов бывают ограниченными. В случае охлаждения машин жидкостью, особенно водой, проблема длины канала зачастую не имеет решающего значения, но в машинах, охлаждаемых водородом, она становится актуальной и приобретает первостепенную важность в тех конструкциях, которые предусматривают непосредственное охлаждение активных частей воздухом.

В связи с этим целесообразно представить некоторые основные расчетные соотношения в такой форме, чтобы длина канала входила в них в явном виде. Проведем это, исходя из приближенной формулы (14-13) для максимального превышения температуры. Перепишем ее в виде:

$$\vartheta = \frac{4\bar{P}L}{\omega\Pi cd} + \frac{\bar{P}}{\alpha\Pi}. \quad (14-18)$$

Здесь \bar{P} — потери на единицу длины канала, *вт/м*; L — длина канала, *м*; ω — скорость движения среды в канале, *м/сек*; d — гидравлический диаметр канала, *м*.

Коэффициент теплообмена α может быть определен на основе критериального уравнения теплообмена в каналах (§ 11-6):

$$\alpha = n\omega^{0,8}d^{0,2}, \quad (14-19)$$

где $n = 0,023 \frac{\lambda_r \text{Pr}^{0,4}}{\nu^{0,8}}$.

Прежде чем приступить к преобразованию расчетных формул, рассмотрим возможные технические условия, которые в различных случаях могут быть положены в основу проектирования системы охлаждения машины. Основным следует считать одно из следующих двух условий.

1. Напор нагнетательных элементов системы охлаждения является величиной заданной. Необходимо определить зависимость величины максимального превышения температуры проводников от длины каналов (например, случай охлаждения воздухом обмотки возбуждения гидрогенераторов).

2. Максимальное превышение температуры проводников задано. Требуется определить зависимость необходимого напора нагнетательных элементов от длины охлаждающих каналов (например, случай охлаждения водородом обмотки возбуждения турбогенераторов).

Рассмотрим вначале первое условие:

$$H = \xi \frac{\gamma}{2g} \omega^2 = \left(\xi_1 + \lambda \frac{L}{d} \right) \frac{\gamma}{2g} \omega^2 = \text{const.} \quad (14-20)$$

Воспользуемся выражением (14-20) для получения зависимости превышения температуры проводника от длины канала.

Для этой цели исключим из (14-18) величину ω . Из (14-20) имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gH}{\gamma \xi}}. \quad (14-21)$$

Тогда после подстановки (14-19) и (14-21) в (14-18) получим:

$$\vartheta'_m = a' L \left(\xi_1 + \lambda \frac{L}{d} \right)^{0,5} + b' \left(\xi_1 + \lambda \frac{L}{d} \right)^{0,4}, \quad (14-22)$$

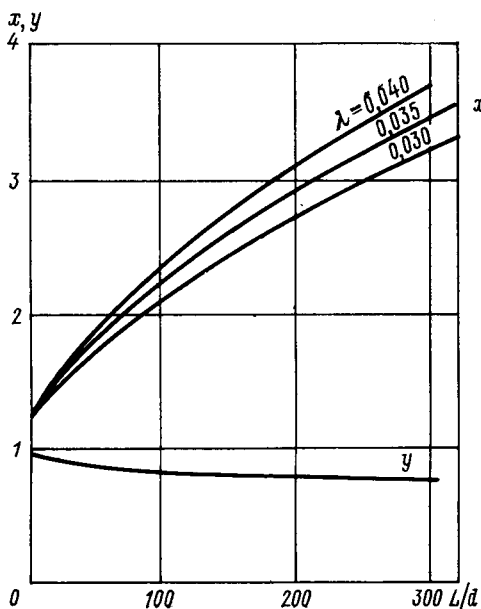
где

$$a' = \frac{4\bar{P}}{\Pi c d} \left(\frac{\gamma}{2gH} \right)^{0,5};$$

$$b' = \frac{\bar{P} d^{0,2}}{n \Pi} \left(\frac{\gamma}{2gH} \right)^{0,4}.$$

В типовом случае прямых каналов постоянного сечения, когда $\xi = 1,5$, удобнее пользоваться формулой $\vartheta'_m = x(a'L + b'y)$, где

Рис. 14-16. К учету влияния относительной длины канала



значения коэффициентов x и y берутся в зависимости от относительной длины канала L/d из графиков на рис. 14-16.

Следует иметь в виду, что значение коэффициента трения λ , зависящего от неизвестной скорости движения среды, должно быть принято в расчете предварительно, как это обычно делают в вентиляционном и гидравлическом расчетах. При необходимости после выбора длины канала может быть проделано второе приближение. Как правило, однако, в этом нет необходимости, поскольку коэффициент трения зависит от скорости незначительно, а ориентировочное значение скорости легко может быть получено на основе априорного задания длины канала.

Формулу (14-22) целесообразно применять лишь для диапазона относительных длин $30 < L/d < 300$.

В случае $L/d \geq 300$ можно принять $\xi = \lambda \frac{L}{d}$; тогда (14-22) упрощается до вида:

$$\vartheta''_m = a'' L^{1.5} + b'' L^{0.4}, \quad (14-23)$$

где

$$a'' = \frac{4\bar{P}}{\Pi c d^{1.5}} \left(\frac{\lambda \gamma}{2gH} \right)^{0.5}; \quad b'' = \frac{\bar{P} d^{0.2}}{n \Pi} \left(\frac{\lambda \gamma}{2gH} \right)^{0.4}.$$

В случае $L/d \leq 30$ можно принять $\xi = \xi_1$; тогда будем иметь:

$$\vartheta''' = a''' L + b''', \quad (14-24)$$

где

$$a''' = \frac{4\bar{P}L}{\Pi c d} \left(\frac{\gamma \xi_1}{2gH} \right)^{0.5}; \quad b''' = \frac{\bar{P} d^{0.2}}{n \Pi} \left(\frac{\gamma \xi_1}{2gH} \right)^{0.4}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго из двух сформулированных выше основных условий проектирования. Именно, определим влияние длины канала на напор нагнетательных элементов при заданном максимальном превышении температуры проводников.

Имеем:

$$\vartheta_m = \frac{4\bar{P}L}{c \Pi d \omega} + \frac{\bar{P} d^{0.2}}{n \Pi \omega^{0.8}} = \text{const.} \quad (14-25)$$

Умножим обе части уравнения (14-25) на ω и разделим на ϑ_m ; тогда получим:

$$\omega = k_1 L + k_2' \omega^{0.2},$$

где

$$k_1 = \frac{4\bar{P}}{\Pi c d \vartheta_m} \quad \text{и} \quad k_2' = \frac{\bar{P} d^{0.2}}{n \Pi \vartheta_m}.$$

С большой степенью точности можно считать $\omega^{0.2} = z L^{0.2}$, где $z = (\omega/L)^{0.2}$ — величина, постоянная для заданной удельной нагрузки P .

Если теперь обозначить $z k_2' = k_2$, то будем иметь:

$$\omega = k_1 L + k_2 L^{0.2}, \quad (14-26)$$

где

$$k_2 = \frac{\bar{P} d^{0.2} z}{n \Pi \vartheta_m}.$$

Уравнение (14-26) определяет зависимость скорости движения охлаждающей среды от длины канала при заданном превышении температуры. Для определения зависимости напора нагнетателей от длины канала воспользуемся (14-20):

$$H = \frac{\gamma}{2g} \left(\xi_1 + \lambda \frac{L}{d} \right) \omega^2 = A \omega^2 + B L \omega^2,$$

где

$$A = \frac{\gamma}{2g} \xi_1; \quad B = \frac{\gamma}{2g} \frac{\lambda}{d}.$$

Поскольку в соответствии с (14-26)

$$\omega^2 = k_1 L^2 + 2k_1 k_2 L^{1,2} + k_2^2 L^{0,4},$$

получим:

$$H = Ak_1^2 L^2 + 2Ak_1 k_2 L^{1,2} + Ak_2^2 L^{0,4} + Bk_1^2 L^3 + 2Bk_1 k_2 L^{2,2} + Bk_2^2 L^{1,4}.$$

Обозначим теперь

$$Bk_1^2 = n_1; \quad 2Bk_1 k_2 = n_2; \quad Ak_1^2 = n_3; \quad Bk_2 = n_4; \quad 2Ak_1 k_2 = n_5; \quad Ak_2^2 = n_6,$$

тогда выражение для напора будет иметь вид:

$$H = n_1 L^3 + n_2 L^{2,2} + n_3 L^2 + n_4 L^{1,4} + n_5 L^{1,2} + n_6 L^{0,4}, \quad (14-27)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{8\bar{P}\gamma\lambda}{g\Pi^2 d^3 c^2 \vartheta_M^2}; & n_2 &= \frac{4\bar{P}\gamma\lambda z}{gn\Pi^2 cd^{1,8}\vartheta_M^2}; \\ n_3 &= \frac{8\bar{P}\gamma\xi_1}{g\Pi^2 d^2 c^2 \vartheta_M^2}; & n_4 &= \frac{\bar{P}^2 \gamma \lambda z^2}{2gn^2 \Pi^2 d^{0,6}\vartheta_M^2}; \\ n_5 &= \frac{4\bar{P}^2 \gamma \xi_1 z}{g\Pi^2 d^{0,8} c \vartheta_M^2}; & n_6 &= \frac{\bar{P}^2 \gamma \xi_1 z^2}{2gn^2 \Pi^2 d^{-0,4}\vartheta_M^2}. \end{aligned}$$

Выражение (14-27) представляет собой явно выраженную зависимость от длины каналов напора нагнетательных элементов, потребного для создания такой скорости движения охлаждающей среды, при которой обеспечивается охлаждение проводников до заданной температуры.

Примеры расчета. Пример 1. Определить зависимость максимального превышения температуры от длины каналов обмотки возбуждения гидрогенератора, если перепад напора в каналах равен 10 и 100 мм вод. ст. Охлаждающая среда — воздух. Удельные потери $\bar{P} = 867$ вт/м. Размеры канала: $\Pi = 0,286$ м; $d = 0,00587$ м. Имеем:

$$n = 0,023 \frac{27 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,72^{0,4}}{(17,9 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,8} = 3,24.$$

При $H = 10$ кгс/м²

$$a' = \frac{4 \cdot 867}{0,286 \cdot 5,87 \cdot 10^{-3} \cdot 1,1 \cdot 10^3} \frac{(1,09)^{0,5}}{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 140;$$

$$b' = \frac{867 (5,87 \cdot 10^{-2})^{0,2}}{3,24 \cdot 0,286} \frac{(1,09)^{0,4}}{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 42,0.$$

При $H = 100$ кгс/м²

$$a' = 44,5; \quad b' = 13,4.$$

Зависимость максимального превышения температуры от длины каналов по (14-22) приведена на рис. 14-17.

Пример 2. Определить зависимость максимального превышения температуры от длины каналов обмотки возбуждения турбогенератора, если

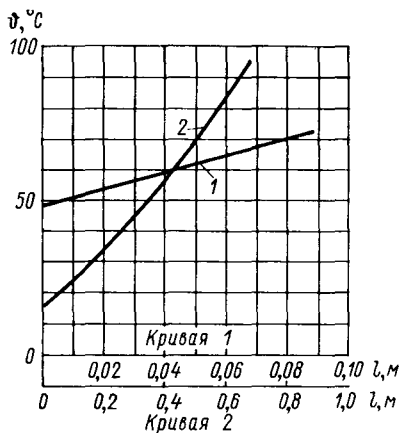


Рис. 14-17. Зависимость максимального превышения температуры от длины канала при воздушном охлаждении

1 — $H=10$ кгс/м²; 2 — $H=100$ кгс/м²

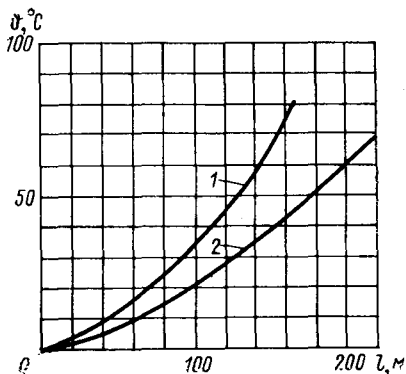


Рис. 14-18. Зависимость максимального превышения температуры от длины канала при водяном охлаждении

1 — $H=20$ атм; 2 — $H=50$ атм

перепад напора в каналах равен 20 и 50 атм. Охлаждающая среда — вода. Удельные потери $\bar{P}=580$ Вт/м. Размеры канала: $\Pi=0,0377$ м; $d=0,012$. Имеем:

$$n = 0,023 \frac{647 \cdot 10^{-3} \cdot 3,56^{0,4}}{(0,556 \cdot 10^{-6})^{0,8}} = 2500.$$

При $H=20 \cdot 10^4$ кгс/м²

$$a'' = \frac{4 \cdot 580}{4,19 \cdot 10^6 \cdot 0,0377 \cdot 0,012^{1,5}} \times \frac{(0,035 \cdot 1000)^{0,5}}{2 \cdot 9,8 \cdot 20 \cdot 10^4} = 0,021;$$

$$b = \frac{580}{2500 \cdot 0,0377 \cdot 0,012^{0,2}} \times \frac{(0,035 \cdot 1000)^{0,4}}{2 \cdot 9,8 \cdot 20 \cdot 10^4} = 0,098.$$

При $H=50 \cdot 10^4$ кгс/м²

$$a'' = 0,034; \quad b'' = 0,11.$$

Зависимость максимального превышения температуры от длины каналов по (14-23) приведена на рис. 14-18.

Пример 3. Определить зависимость необходимого напора вентилятора от длины каналов обмотки возбуждения турбогенератора, если допустимое максимальное превышение температуры обмотки $\vartheta_m=90^\circ\text{C}$. Охлаждающая

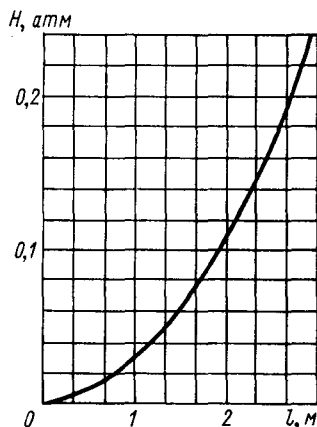


Рис. 14-19. Зависимость напора от длины канала

среда — водород. Удельные потери $\bar{P}=1022$ вт/м. Размеры канала: $\Pi=0,0348$ м; $d=0,00762$ м. Имеем:

$$n = 0,023 \frac{195 \cdot 10^{-3} \cdot 0,72^{0,4}}{(125 \cdot 10^{-6})^{0,8}} = 5,17;$$

$$n_1 = \frac{8 \cdot 1022^2 \cdot 0,228 \cdot 0,035}{9,8 (3,3 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,0348^2 \cdot 0,00762^3 \cdot 90^2} = 23,5;$$

$$n_2 = \frac{4 \cdot 1022^2 \cdot 0,228 \cdot 0,035 \cdot 1,7}{9,8 \cdot 3,3 \cdot 10^3 \cdot 5,17 \cdot 0,0348^2 \cdot 0,00761^{1,8} \cdot 90^2} = 55,5;$$

$$n_3 = \frac{8 \cdot 1022^2 \cdot 0,228 \cdot 1,5}{9,8 (3,3 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,0348^2 \cdot 0,00726^2 \cdot 90^2} = 47,0;$$

$$n_4 = \frac{1022 \cdot 0,228 \cdot 0,035 \cdot 1,7^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,00762^{0,6} \cdot 5,17^2 \cdot 0,0348^2 \cdot 90^2} = 92,1;$$

$$n_5 = \frac{4 \cdot 1022^2 \cdot 0,228 \cdot 1,5 \cdot 1,7}{9,8 \cdot 3,3 \cdot 10^3 \cdot 5,17 \cdot 0,0348^2 \cdot 0,00762^{0,8} \cdot 90^2} = 72,9;$$

$$n_6 = \frac{1022^2 \cdot 0,228 \cdot 1,5 \cdot 1,7^2 \cdot 0,00762}{2 \cdot 9,8 \cdot 5,17^2 \cdot 0,0348^2 \cdot 90^2} = 2,91.$$

Зависимость напора от длины канала по (14-27) приведена на рис. 14-19.

14-5. Выбор сечения каналов

Применение непосредственного охлаждения повышает интенсивность теплообмена в электрических машинах. В то же время выполнение каналов в обмотках приводит к уменьшению располагаемого сечения меди, что, в свою очередь, увеличивает плотность тока в проводниках и выделяемые в них потери. Поэтому при выборе сечения охлаждающих каналов приходится учитывать противоречивые обстоятельства. С одной стороны, при увеличении размеров каналов возрастает поверхность теплообмена и расход охлаждающей среды, что способствует понижению температуры обмотки, с другой стороны, уменьшение сечения проводников, т. е. увеличение их электрического сопротивления, приводит к росту количества выделяемых потерь и, следовательно, к повышению температуры.

В подобных случаях, когда имеют место противоположные воздействия одного параметра системы (сечения охлаждающих каналов) на какой-либо другой параметр (температуру проводников), уместно поставить вопрос о выборе оптимальных соотношений. Здесь, однако, возникают некоторые затруднения. Дело в том, что повышение температуры является не единственным следствием увеличения количества выделяемых потерь. Как очевидно, при этом уменьшается также коэффициент полезного действия машины. Мы увидим ниже, что требование получения минимальной температуры проводников не эквивалентно требованию выделения минимальных потерь. Как правило, ус-

ловия минимального нагрева приводят к необходимости создавать каналы такого сечения, при котором выделяемые потери оказываются больше допустимых по энергетическим соображениям. Если учесть дополнительно, что даже с точки зрения допустимой температуры могут быть получены различные оптимумы в зависимости от условий охлаждения, то станет очевидным, что задача отыскания оптимального сечения каналов не может быть решена однозначно.

В то же время выбор сечения каналов в процессе проектирования машин при использовании любой методики нахождения оптимума не может быть произведен без рассмотрения всего комплекса обстоятельств, затрагиваемых при изменении размеров канала.

Для анализа количественных соотношений рассмотрим особенности формирования установившейся температуры обмотки при различных условиях охлаждения. Такими условиями могут быть:

1) постоянство скорости движения охлаждающей среды в каналах проводников;

2) постоянство напора нагнетательных элементов, обеспечивающих циркуляцию охлаждающей среды;

3) постоянство мощности, расходуемой на охлаждение.

Будем решать задачу об отыскании оптимума по нагреву. Для этой цели воспользуемся обозначениями: S — сечение проводника; F — сечение проводника и канала; fF — сечение канала. Заметим, что при этих обозначениях сечение проводника

$$S = F - fF = F(1 - f).$$

Выразим также гидравлический диаметр канала через его сечение. Для этого примем, что независимо от формы канала его сечение равно квадрату гидравлического диаметра, деленному на некоторое число t . Тогда величина гидравлического диаметра определится соотношением:

$$d = t\sqrt{fF}.$$

Значения коэффициента t для каналов различной формы приведены ниже:

Форма канала . . .	Круг	Квадрат	Прямоугольник со сторонами 1, k
Коэффициент, t . .	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1	$\frac{2\sqrt{k}}{k+1}$

При рассмотрении величины максимального превышения температуры проводника будем считать, что ток I в нем задан и выделяемые потери равны произведению квадрата тока на электрическое сопротивление проводника R . При этом допускается, что изменение затрат мощности на охлаждение не отра-

жается на температуре обмотки. Тогда, обозначая удельное электрическое сопротивление материала проводника через ρ , $\text{ом} \cdot \text{м}^2/\text{м}$ и основные потери через P_0 , вт , получим:

$$P_0 = I^2 R = I^2 \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho_0}{S} = \frac{\rho_0}{F(1-f)} = \frac{C_1}{1-f}, \quad (14-28)$$

где $\rho_0 = I^2 \rho L$ и C — постоянные величины.

Перейдем теперь к записи величины максимального превышения температуры проводников. Согласно изложенному выше

$$\begin{aligned} \vartheta_m = \vartheta_c + \vartheta_k &= \frac{P}{cQ} + \frac{P}{\alpha \Pi L} = \frac{\rho_0}{cF^2 f(1-f)\omega} + \frac{\rho_0 t^{1,2}}{4 \Pi L F^{1,4} f^{0,4} (1-f)\omega^{0,8}} = \\ &= \frac{A_0}{f(1-f)\omega} + \frac{B_0}{f^{0,4}(1-f)\omega^{0,8}}, \end{aligned} \quad (14-29)$$

где A_0 и B_0 — постоянные величины.

Пользуясь выражением (14-29), определим сечение охлаждающих каналов для различных условий охлаждения, исходя из требования минимального нагрева проводников. Из (14-29) сразу видно, что оптимум может быть определен лишь для каждой из составляющих максимального превышения температуры в отдельности. По этой причине для трех различных сформулированных выше условий охлаждения будем поочередно определять сечения каналов, исходя из минимума подогретой и конвективной составляющих превышения температуры, т. е. исходя из требований

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial f} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vartheta_k}{\partial f} = 0.$$

Рассмотрим вначале первое условие охлаждения, т. е. условие постоянства скорости охлаждающей среды. Имеем:

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial f} = A' \frac{2f-1}{f^2(1-f)^2} = 0,$$

отсюда

$$f = 0,5$$

и

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial f} = B' \frac{1,4f^{0,4} - 0,4f^{-0,8}}{f^{0,8}(1-f)^2},$$

откуда

$$f = 0,285.$$

Для получения оптимумов из условия постоянства напора нужно выразить через него скорость в уравнении (14-29). Будем считать при этом для простоты, что весь напор затрачивается на преодоление трения о стенки канала, как это практиче-

ски бывает в случае каналов средней и большой длины. Тогда получим:

$$H = \frac{\gamma}{2g} \lambda \frac{L}{d} \omega^2;$$

следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{2gHtVF}{\gamma\lambda L}} f^{0,25}.$$

Теперь уравнение (14-29) может быть представлено в виде:

$$\vartheta_m = \frac{A''}{f^{1,25}(1-f)} + \frac{B''}{f^{0,6}(1-f)},$$

где A'' и B'' — постоянные величины.

Искомыми оптимумами будут:

При

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial f} = 0 \quad f = 0,555,$$

и при

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial f} = 0 \quad f = 0,375.$$

Если в последнем преобразовании учесть дополнительно зависимость коэффициента трения λ от скорости ω и диаметра d , то величины относительного сечения канала f изменятся незначительно. Из условий минимума подогретой составляющей получим $f=0,535$; из условий минимума конвективной составляющей $f=0,340$.

Чтобы отыскать оптимумы из условия постоянства мощности, затрачиваемой на охлаждение, необходимо выразить через мощность величину ω в (14-29).

Мощность, затрачиваемая на охлаждение,

$$\bar{P}_3 = \frac{QH}{102\eta} = k_1 \omega f F \frac{\omega^2}{t \sqrt{Ff}} = k_1 \omega^3 f^{0,5},$$

где η — к. п. д. напорного элемента.

Следовательно,

$$\omega = k_2 f^{-0,166}$$

и

$$\vartheta_m = \frac{A'''}{f^{0,834}(1-f)} + \frac{B'''}{f^{0,267}(1-f)},$$

где A''' и B''' — постоянные величины.

Отсюда при

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial f} = 0 \quad f = 0,455$$

и при

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial f} = 0 \quad f = 0,210.$$

Составим для наглядности таблицу оптимальных сечений канала при различных условиях охлаждения (табл. 14-2), как это сделал Г. М. Хуторецкий [66].

Таблица 14-2

Условия охлаждения	Оптимальное сечение f	
	при минимальном подогреве среды	при минимуме конвективного теплоперепада
Скорость охлаждения среды постоянна	0,500	0,285
Напор нагнетательных элементов постоянен	0,535	0,340
Потери, затрачиваемые на охлаждение, постоянны	0,455	0,213

Одним из условий охлаждения, помимо рассмотренных выше, может быть требование постоянства расхода охлаждающей среды. В этом случае, очевидно, подогрев охлаждающей среды, в свою очередь, постоянен и его величина не имеет оптимума по сечению. Конвективный перепад также не имеет минимума, но при увеличении диаметра канала он не остается постоянным, а монотонно растет. Поэтому при постоянном расходе охлаждающей среды выбор сечения каналов целесообразно производить, исходя из соображений о минимальных затратах энергии на циркуляцию среды, такой расчет будет проделан несколько позднее.

Анализ значений f , приведенных в табл. 14-2, показывает, что минимальное превышение температуры проводников при разных условиях охлаждения наблюдается в диапазоне относительных сечений канала 0,210—0,535, поскольку в этом диапазоне минимальные значения приобретают составляющие превышения температуры.

Этот вывод наглядно иллюстрируется тепловым расчетом, результаты которого приведены на рис. 14-20. Расчет выполнен для канала длиной 0,6 м, охлаждаемого водородом, циркулирующим с постоянной скоростью 35 м/сек при давлении 3 атм. Выделяемые в проводнике основные потери равны 400 вт при $f=0,273$. Как видно из рисунка, минимум нагрева достигается в данном случае при значении относительного сечения канала, равном 0,435.

Важно подчеркнуть также, что при уменьшении сечения канала примерно на 30—35% по отношению к оптимуму темпе-

ратура возрастает незначительно. Однако дальнейшее уменьшение канала нежелательно, ибо оно приводит к резкому возрастанию температуры.

Как указывалось, условия минимального нагрева, которые мы подробно проанализировали, не эквивалентны условиям минимума выделяемых потерь. Действительно, потери на охлаждение, как правило, несоизмеримо меньше основных потерь. Что же касается последних, то они монотонно возрастают при увеличении сечения охлаждающих каналов, т. е. оптимум по сечению отсутствует.

Поскольку, однако, в отдельных случаях непосредственного охлаждения потери энергии на циркуляцию среды бывают соизмеримы с основными потерями в проводниках, целесообразно рассмотреть вопрос о минимуме суммы потерь в проводнике в зависимости от сечения охлаждающего канала.

Потери, затрачиваемые на охлаждение, при постоянной скорости движения среды пропорциональны сечению канала (здесь для простоты принято, что величина ξ не зависит от сечения):

$$P_3 = \frac{\xi \gamma F}{204 g \eta} \omega^3 f \cdot 10^3, \text{ вт.}$$

В этом случае при увеличении сечения канала потери на охлаждение будут монотонно возрастать, так же как и основные потери. Естественно, что сумма потерь не имеет оптимума по сечению канала. Аналогичная картина будет наблюдаться и при неизменных напоре и мощности нагнетательных элементов.

В практике, однако, может быть случай, когда по условиям охлаждения постоянным является расход охлаждающей среды. В этом случае при увеличении сечения канала потери энергии на циркуляцию среды будут убывать, так как будет убывать скорость движения среды.

Пользуясь введенными выше обозначениями, получим после простых преобразований:

$$P_3 = 1,55 \frac{\gamma L Q^{2,75} \nu^{0,25}}{g \eta F^{2,375} t^{1,25}} \frac{1}{f^{2,375}} = \frac{C_2}{f^{2,375}},$$

где ν — кинематическая вязкость среды, $\text{м}^2/\text{сек.}$

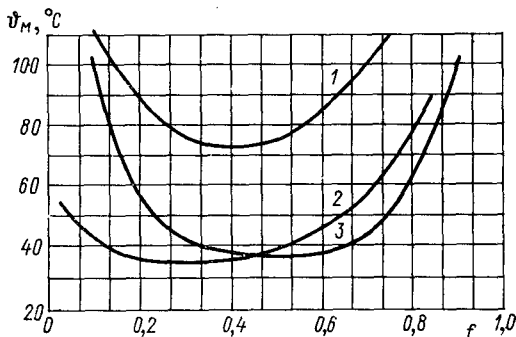


Рис. 14-20. Определение оптимального сечения канала при водородном охлаждении
1 — суммарное превышение температуры; 2 — конвективная составляющая; 3 — подогревная составляющая

Теперь может быть поставлен вопрос об отыскании минимума суммы потерь. Сумма потерь

$$P = P_0 + P_3 = \frac{C_1}{1-f} + \frac{C_2}{f^{2,375}}. \quad (14-30)$$

Если принять с некоторой ошибкой $f^{2,375} \approx f^2$ и приравнять производную по f от (14-30) нулю, получим следующее кубическое уравнение:

$$f^3 - 2Mf^2 + 4Mf - 2M = 0,$$

где

$$M = \frac{C_2}{C_1} = 1,55 \frac{\gamma Q^{2,75} \nu^{0,25}}{l^2 \rho g \eta F^{1,375} t^{1,25}}. \quad (14-31)$$

Уравнение (14-31) позволяет определить оптимальное сечение канала для таких условий проектирования, когда потери энергии на циркуляцию охлаждающей среды в каналах соизмеримы с основными потерями, выделяемыми в проводниках.

Результаты решения уравнения (14-31) для заданного подогрева среды (25 град) и для разных охлаждающих сред приведены в табл. 14-3. Длина канала при воздушном охлаждении принята в расчете равной 2,5 м, при водяном 20 м.

Таблица 14-3

Охлаждающая среда	M	f
Воздух	$0,55 \cdot 10^{-1}$	0,36000
Водород при 1,0 атм	$0,57 \cdot 10^{-2}$	0,19000
» » 3,0 атм	$0,82 \cdot 10^{-3}$	0,11000
Вода	$0,27 \cdot 10^{-8}$	0,00176.

Результаты точного решения задачи на основе (14-30) для случая воздушного охлаждения приведены на рис. 14-21.

Из табл. 14-3 видно, что постановка задачи о минимуме потерь при выборе сечения охлаждающих каналов имеет смысл лишь при непосредственном воздушном охлаждении сравнительно длинных каналов. Когда же в качестве охлаждающих агентов применяют водород (особенно водород повышенного давления) или, тем более, жидкость, требование минимума суммы потерь приводит к нецелесообразно малому сечению канала. В этом случае значительно снижается эффективность теплообмена внутри проводников, что по существу сводит на нет достоинства непосредственного охлаждения.

Таким образом, требование минимального нагрева приводит к недопустимо большим, с точки зрения выделяемых потерь,

сечениям охлаждающих каналов. С другой стороны, требование минимальных потерь приводит к недопустимо малым, с точки зрения нагрева, сечениям каналов. По этой причине при проектировании машин с непосредственным охлаждением в каждом конкретном случае необходимо учитывать специфические особенности системы охлаждения, имея в виду приведенные выше количественные характеристики.

Если, например, речь идет о непосредственном водяном охлаждении проводников, когда конвективная составляющая теплотерепеда практически не сказывается на величине максимального повышения температуры, то надо стремиться к возможному увеличению сечения каналов (см. табл. 14-3). При этом ограничивающим фактором будет являться к. п. д. электрической машины в целом.

В случае непосредственного охлаждения вращающихся проводников ротора необходимо также иметь в виду соблюдение требований их механической прочности.

Однако в связи с принципиальной неоднозначностью решения задачи о размерах каналов поиски каких-либо универсальных рецептов были бы бессмысленными.

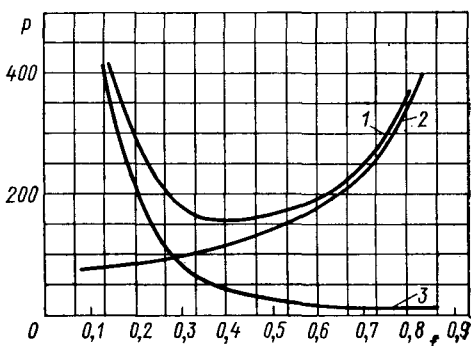


Рис. 14-21. Оптимальное сечение канала при воздушном охлаждении
1 — сумма потерь; 2 — основные потери; 3 — потери на охлаждение

14-6. Нестационарный теплообмен при непосредственном охлаждении

Чтобы исследовать нестационарный теплообмен при непосредственном охлаждении, необходимо в уравнении теплопроводности (14-2) и уравнении нагрева охлаждающей среды (14-3) учесть время процесса. Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} c\gamma \frac{\partial \vartheta_{\text{п}}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 \vartheta_{\text{п}}}{\partial x^2} + p_0(1 + \beta \vartheta_{\text{п}}) - \frac{\Pi}{S} \alpha (\vartheta_{\text{п}} - \vartheta_{\text{с}}); \\ \alpha (\vartheta_{\text{п}} - \vartheta_{\text{с}}) \Pi dx &= \gamma_{\text{с}} c_{\text{с}} S_{\text{с}} dx \left(\frac{\partial \vartheta_{\text{с}}}{\partial t} + w \frac{\partial \vartheta_{\text{с}}}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} (14-32)$$

В последнем уравнении взята субстанциональная производная температуры, поскольку среда движется, т. е. налицо и локальные и конвективные изменения (см. § 4-3).

Краевые условия задачи теперь формулируются следующим образом:

$$\frac{\partial \vartheta_{\Pi}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \vartheta_{\Pi}}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad \vartheta_{\Pi}(0, t) = f_0(t); \quad \vartheta_{\Pi}(x, 0) = 0; \quad \vartheta_c(x, 0) = 0.$$

Здесь имеется в виду, что при рассмотрении процесса внезапного увеличения (а не сброса) нагрузки к полученному решению всегда могут быть добавлены функции установившейся температуры предшествующего режима $\vartheta_{\Pi,y}(x, 0)$ и $\vartheta_{c,y}(x, 0)$.

Заметим, что при $\lambda=0$, когда известна температура среды на входе в начале процесса ($\vartheta_c(0, 0) = \vartheta_0$), зависимость температуры стенки канала на входе от времени $f_0(t)$ может быть получена непосредственно из первого уравнения системы (14-32). В самом деле, линейное уравнение $y' + \varphi(x)y = Q(x)$ имеет интегрирующий множитель $\mu = \exp(\int \varphi dx)$ и общее решение $y = \exp(-\int \varphi dx) [\int Q(\exp \int \varphi dx) dx + C]$, откуда

$$\vartheta_{\Pi}(0, t) = f_0(t) = \exp\left(-\frac{\Pi\alpha - \rho_0\beta}{c\gamma S}\right) \left[\vartheta_0 + \left(\frac{\rho_0}{c\gamma} + \frac{\rho_0\alpha\vartheta_0}{c\gamma S}\right) \right] \times \\ \times \int_0^t \exp\left(\frac{\Pi\alpha - \beta\rho_0}{c\gamma S} t\right) dt. \quad (14-33)$$

Решение системы уравнений (14-32) не может быть получено теми же приемами, что и для стационарного теплообмена. В самом деле, объединение обоих уравнений в одно и исключение какой-либо неизвестной температуры, например ϑ_{Π} , приводит к уравнению третьего порядка со смешанными производными, которое не может быть проинтегрировано, а это лишает смысла всю операцию. С другой стороны, экспоненциальные функции уже не удовлетворяют ни уравнениям процесса, ни краевым условиям, так что частные решения также не могут быть априорно названы.

Больше того, имеющийся экспериментальный материал показывает, что развитие процесса нарастания температуры при набросе нагрузки на непосредственно охлаждаемые обмотки совершается по закону, во многих случаях далекому от экспоненциального.

В 1964 г. Э. И. Гуревич на заводе «Электросила» измерил нарастание температуры при внезапном нагружении проводников, охлаждаемых водой и газом. Скорости теплоносителей и удельные тепловые нагрузки варьировались в широких пределах. Основным выводом исследования явилась констатация того факта, что при водяном охлаждении температура нарастает со временем линейно по крайней мере до 80% установившегося значения. Было замечено также, что длительность процесса пропорциональна циклу охлаждения $\tau_0 = L/\omega$, т. е. времени,

в течение которого фиксированная частица охлаждающей среды проходит расстояние от начала до конца канала.

К аналогичным выводам пришел и И. С. Генендер, который в 1963 г. на Новосибирском турбогенераторном заводе исследовал ту же проблему в менее общей постановке применительно к охлаждаемым водой проводникам обмотки возбуждения турбогенератора. Генендеру принадлежит заслуга аналитического решения задачи для условий совершенного теплового контакта охлаждающей среды со стенками канала ($\alpha = \infty$; $\vartheta_{\text{п}} - \vartheta_{\text{с}} = 0$). Проанализируем это решение.

Введем обозначения:

$$\Theta = \vartheta \frac{c_{\text{с}} \gamma_{\text{с}} S_{\text{с}}}{P} \omega; \quad X = \frac{x}{L}; \quad T = t \frac{c_{\text{с}} \gamma_{\text{с}} S_{\text{с}}}{c_{\text{п}} \gamma_{\text{п}} S_{\text{п}}} \frac{\omega}{L}.$$

Тогда, пренебрегая в системе уравнений (14-32) продольной теплопроводностью ($\lambda = 0$), зависимостью тепловыделения от температуры ($\beta = 0$) и подставляя $\vartheta_{\text{п}} = \vartheta_{\text{с}} = \vartheta$, получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 1 \quad (14-34)$$

с краевыми условиями:

$$\Theta(0, T) = \vartheta(0, t) = \Theta(X, 0) = \vartheta(x, 0) = 0. \quad (14-35)$$

Применение к уравнению (14-34) преобразования Лапласа дает:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial X} + s \bar{\Theta} = \frac{1}{s}; \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sX}), \quad (14-36)$$

откуда [24]

$$\Theta = \begin{cases} T & \text{при } T \leq X; \\ X & \text{при } T \geq X, \end{cases} \quad (14-36')$$

т. е.

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{\rho_0 S_{\text{п}}}{c_{\text{с}} \gamma_{\text{с}} S_{\text{с}} + c_{\text{п}} \gamma_{\text{п}} S_{\text{п}}} t & \text{при } T < X; \\ \frac{\rho_0 S_{\text{п}} L}{c_{\text{с}} \gamma_{\text{с}} S_{\text{с}} \omega} \frac{x}{L} & \text{при } T \geq X. \end{cases} \quad (14-36'')$$

График зависимости температуры максимально нагретой точки проводника от времени процесса приведен на рис. 14-22. Здесь же для сопоставления показаны экспериментальные данные Гуревича [19]. Как можно видеть, принятые допущения мало повлияли на точность результата. Это объясняется тем, что температура стенки в течение всего процесса нагревания близка к температуре воды в соответствующем сечении канала (разница составляет обычно десятые доли градуса). Кроме того, в связи с большими скоростями процесса (постоянные времени исчисляются лишь долями минуты) продольная теплопровод-

ность и удельное сопротивление проводника мало влияют на распределение температуры.

Учитывая сказанное, И. С. Генендер распространил метод расчета на случай конечной величины разности температур $\vartheta_n - \vartheta_c$, принимая по-прежнему в качестве краевых условий (14-35). Полученное решение имеет вид [16]:

$$\Theta_1 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{k+1}{k}\tau\right)\right] + \frac{\tau}{k+1} - \frac{1}{k+1} \exp\left(-\frac{\eta}{q}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\tau - \frac{k}{q}\mu} \left\{ \tau - \frac{x}{q}\eta - \varphi + \frac{1}{k+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{k+1}{k}\left(\tau - \frac{k}{q}\eta - \varphi\right)\right)\right] \right\} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{q}{\eta}} \varphi \exp(-\varphi) I_1\left(2\sqrt{\frac{\eta}{q}}\varphi\right) d\varphi, \quad (14-37)$$

где $\Theta_1 = \frac{\vartheta_n \alpha}{\rho_0 S_n L}$; $\tau = \frac{t \alpha}{c \gamma S L}$; $q = \frac{c_c \gamma_c S_c \omega}{\alpha}$; $k = \frac{c_c \gamma_c S_c}{c_n \gamma_n S_n}$;

I_1 — модифицированная функция Бесселя.

Автор приводит сопоставление результатов расчета по (14-37) и по (14-36).

Строгий анализ последнего случая может быть произведен на основе решения, полученного В. С. Дорожкиным, для трубки теплообменника [25].

Для этой цели в исходном уравнении достаточно заменить тепловой поток от внешней среды тепловыделением проводника. Результат решения естественно еще более громоздок, чем (14-37).

В свете сказанного наиболее плодотворным методом общего анализа нестационарного теплообмена представляется метод численного интегрирования системы уравнений (14-32). Приведем здесь решение Э. И. Гуревича [20], подробно сопоставленное им с результатами многочисленных тщательно организованных экспериментов.

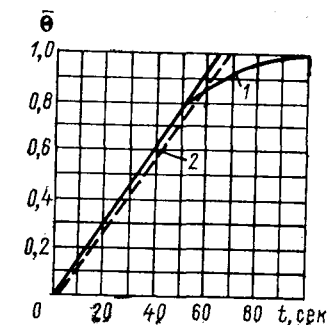


Рис. 14-22. Зависимость максимальной температуры от времени

1 — эксперимент; 2 — расчет

Заменим действительную картину течения дискретным движением по следующей схеме. В течение независимого промежутка времени Δt охлаждающая среда считается неподвижной, однако коэффициент теплообмена с поверхности канала принимается соответствующим действительной скорости среды ω_{ki} на i -м участке проводника в k -й промежуток времени. По окончании промежутка времени Δt среда мгновенно перемещается на расстояние $\Delta L_{ki} = \omega_{ki} \Delta t$ и остается в таком положении в течение промежутка времени Δt и т. д.

Теплообмен в пределах произвольного участка проводника ΔL_{ki} на протяжении промежутка времени Δt рассматриваем с учетом допущений:

1) температура охлаждающей среды ϑ_{ki} и проводника Θ_{ki} в данный момент времени не изменяется по длине рассматриваемого участка;

2) тепловыделение $p(k, i)$, вт/м, на i -м участке проводника постоянно на протяжении k -го промежутка времени;

3) температура охлаждающей среды и проводника на i -м участке линейно нарастает на протяжении промежутка времени Δt .

Элементарный объем охлаждающей среды $\Delta V = S_c \Delta L$ при расчетном толчкообразном перемещении вдоль канала воспринимает порции тепла поочередно от каждого элементарного участка поверхности канала за отрезки времени «задержки», продолжительностью Δt каждый. Тепло, воспринятое элементарным объемом среды за k -й промежуток времени от i -го участка поверхности, повышает температуру среды в этом месте на величину $\Delta \vartheta_{ki}$. Другая часть тепла, выделившегося в проводнике, затрачивается на повышение температуры i -го участка проводника на величину $\Delta \Theta_{ki}$. Наконец, некоторое количество тепла передается посредством теплопроводности в рассматриваемый участок из последующего (по направлению движения охлаждающей среды) и некоторое количество тепла — из рассматриваемого участка в предыдущий. Имея в виду, что в большинстве практических случаев процесс нестационарной теплопроводности способен лишь незначительно повлиять на тепловой баланс рассматриваемого участка проводника, исключим этот процесс из рассмотрения, оценив в дальнейшем погрешность такого допущения. Тогда тепловой баланс i -го участка проводника на протяжении k -го промежутка времени будет описываться уравнением:

$$p_{ki} \Delta L \Delta t = c_n \gamma_n S_n \Delta L \Delta \vartheta_{ki} \Delta t + \alpha \Pi \Delta L \Delta t (\Theta_{ki \text{ cp}} - \vartheta_{ki \text{ cp}}). \quad (14-38)$$

Подогрев охлаждающей среды, переместившейся к началу данного промежутка времени из предыдущего ($i-1$)-го в рассматриваемый i -й участок проводника, составляет

$$\Delta \vartheta_{ki} = \vartheta_{ki} - \vartheta_{k-1, i-1} = \frac{\alpha \Pi \Delta t}{c_c \gamma_c S_c} (\Theta_{ki \text{ cp}} - \vartheta_{k-1, i-1, \text{ cp}}), \quad (14-39)$$

где $\Delta \Theta_{ki} = \Theta_{ki} - \Theta_{k-1, i}$; $\Theta_{ki \text{ cp}} = \frac{\Theta_{ki} + \Theta_{k-1, i}}{2}$; $\vartheta_{ki \text{ cp}} = \frac{\vartheta_{ki} + \vartheta_{k-1, i-1}}{2}$.

Совместное решение уравнений (14-38) и (14-39) относительно величин (14-38) и (14-39) дает рекуррентные формулы для расчета температуры проводника и охлаждающей среды на данном i -м участке к концу k -го промежутка времени, если известны значения температуры проводника на этом участке и

охлаждающей среды на предыдущем участке к концу $(k-1)$ -го промежутка времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{ki} = A_{\pi} + B_{\pi} \Theta_{k-1, i} + C_{\pi} \vartheta_{k-1, i-1}; \\ \vartheta_{ki} = A_c + B_c \vartheta_{k-1, i-1} + C_c \Theta_{k-1, i}. \end{array} \right. \quad (14-40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{ki} = A_{\pi} + B_{\pi} \Theta_{k-1, i} + C_{\pi} \vartheta_{k-1, i-1}; \\ \vartheta_{ki} = A_c + B_c \vartheta_{k-1, i-1} + C_c \Theta_{k-1, i}. \end{array} \right. \quad (14-41)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_{\pi} = \frac{2m+1}{2m+1+\sigma} \varphi \Delta t; \quad A_c = \frac{1}{2m+1+\sigma} \varphi \Delta t;$$

$$B_{\pi} = \frac{2m+1-\sigma}{2m+1+\sigma}; \quad B_c = \frac{2m-1+\sigma}{2m+1+\sigma};$$

$$C_{\pi} = 1 - B_{\pi}; \quad C_c = 1 - B_c; \quad m = \frac{c_c \gamma_c S_c}{\alpha \Pi \Delta t};$$

$$\sigma = \frac{c_c \gamma_c S_c}{c_{\pi} \gamma_{\pi} S_{\pi}}; \quad \varphi = \frac{p}{c_{\pi} \gamma_{\pi} S_{\pi}}.$$

Температурно-временные зависимости для любого участка проводника могут быть рассчитаны путем многократного применения формул (14-40) и (14-41) для $k=1, 2, \dots, \infty, i=1, 2, \dots, N$, если заданы:

- 1) график тепловой нагрузки,
- 2) закон изменения скорости среды,
- 3) начальные и граничные условия.

Для использования в формулах (14-30) и (14-31) исходные данные и краевые условия должны быть подготовлены в следующей дискретной форме:

$$p(k, i); \quad w(k, i); \quad \vartheta_{k, 0}; \quad \Theta_{0, i}(i); \quad \vartheta_{0, i}(i).$$

В общем случае коэффициенты A, B и C в формулах (14-30) и (14-31) зависят от аргументов i и k . В простейших случаях постоянной скорости охлаждающей среды и скачкообразного изменения во времени потерь (перегрузка по току) указанные коэффициенты постоянны.

Температурное поле проводника и охлаждающей среды, рассчитанное по формулам (14-40) и (14-41), тем ближе соответствует исходным уравнениям (14-32) и краевым условиям (14-33), чем меньшим выбран промежуток времени Δt . Формулы (14-40) и (14-41) пригодны для произвольной геометрии проводников, для любых охлаждающих сред и для любого графика тепловой нагрузки.

Для конкретных классов обмоток и конкретных режимов их работы можно рекомендовать специфические упрощения методики расчета. Рассмотрим важный для практики режим мгновенного нагружения током проводников с жидкостным и газовым охлаждением.

При водяном охлаждении перепад температур поверхности канала и охлаждающей воды составляет незначительную долю

общего превышения температуры проводника. Полагая в связи с этим для любого момента времени $\Theta \approx \vartheta$ и $d\Theta/dt \approx d\vartheta/dt$, получим:

$$\Theta_t = \Theta_{\text{нач}} + \frac{\Theta_y - \Theta_{\text{нач}}}{T} t; \quad T_{\text{макс}} = \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) (m + 1) \frac{L}{w};$$

$$T_{\text{ср}} = \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) (m + 0,5) \frac{L}{w}.$$

При газовом охлаждении перепад температур поверхности канала и воды соизмерим с подогревом охлаждающей среды. В данном случае

$$\Theta_t = \Theta_y (1 - e^{-t/T_L}); \quad T_L = \frac{c_n \gamma_n S_n}{\alpha \Pi} \left(1 + \frac{\alpha \Pi L}{c_c \gamma_c S_c w} \right);$$

$$\Theta_y = pL \left(\frac{1}{\alpha \Pi L} + \frac{1}{c_c \gamma_c S_c w} \right); \quad T_x = \frac{c_n \gamma_n S_n}{\alpha \Pi} \left(1 + \frac{\alpha \Pi}{c_c \gamma_c S_c w} x \right).$$

Если расчету подлежит неустановившаяся температура при внезапной перегрузке, которой предшествовал установившийся тепловой режим, то соответствующие температурно-временные зависимости для любой точки проводника примут вид:

а) при водяном охлаждении ($t \leq T_x$)

$$\Theta = \Theta_{y0} + \Theta_{y0} (k_p - 1) \frac{t}{T_x};$$

$$T_x = \frac{c_c \gamma_c S_c + c_n \gamma_n S_n}{c_c \gamma_c S_c} \frac{L}{w} \frac{x}{L};$$

б) при газовом охлаждении

$$\Theta = \Theta_{y0} + \Theta_{y0} (k_p - 1) (1 - e^{-t/T_x}),$$

где Θ_{y0} — установившееся превышение температуры, соответствующее начальному значению потерь; $k_p = \frac{P_1}{P_{\text{нач}}}$ — кратность увеличения потерь в обмотке.

Приведенный в данном параграфе анализ позволяет трактовать процесс нестационарного нагревания при непосредственном водяном охлаждении как процесс, состоящий из двух стадий: квазистационарной с постоянной скоростью нарастания температуры (до $t_1 = \frac{c_c \gamma_c S_c + c_n \gamma_n S_n}{c_c \gamma_c S_c} \frac{L}{w}$) и стационарной (при $t \geq t_1$).

Особенностью первой стадии является независимость температуры от скорости движения воды. Длительность квазистационарного процесса определяется отношением приведенных теплоемкостей проводника и воды и пропорциональна циклу охлаждения.

При газовом охлаждении температурная кривая обмотки аппроксимируется экспонентой, постоянная времени которой увеличивается с увеличением длины канала.

Примеры расчета. Пример 1. Определить максимальную температуру обмотки ротора с непосредственным водяным охлаждением через 15 сек после начала двукратной форсировки возбуждения, если этому предшествовал установившийся тепловой режим. (Полагаем, что в момент форсировки произошло скачкообразное увеличение потерь в обмотке в 4 раза и в дальнейшем эти потери оставались постоянными на протяжении интересующего нас промежутка времени).

Размеры проводника обмотки и канала:

$$L = 20 \text{ м}; S_c = 177 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; S_n = 723 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; \Pi = 47 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Физические свойства проводника и охлаждающей среды и параметры режима охлаждения:

$$\begin{aligned} c_n &= 390 \text{ дж/(кг·град)}; c_c = 4190 \text{ дж/(кг·град)}; \rho_n = 890 \text{ кг/м}^3; \\ \rho_c &= 100 \text{ кг/м}^3; \omega = 3 \text{ м/сек}; Q = 531 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{сек}; \\ \alpha &= 13 \cdot 10^3 \text{ вт/(м}^2 \cdot \text{град)}. \end{aligned}$$

Параметры режима тепловыделения:
до начала форсировки

$$p_{\text{нач}} = 1450 \text{ вт/м};$$

с момента форсировки

$$p_1 = 5800 \text{ вт/м}.$$

Приближенный расчет. Установившийся подогрев воды на выходе из канала (и приблизительно равное ему максимальное превышение температуры проводника):

$$\Theta_{y0} \approx \Delta\theta_y = \frac{1450 \cdot 20}{4,19 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 531 \cdot 10^{-6}} = 13,0^\circ \text{ С}.$$

Длительность неустановившегося процесса:

$$T_L = \frac{390 \cdot 890 \cdot 723 \cdot 10^{-6} + 4190 \cdot 1000 \cdot 177 \cdot 10^{-6}}{4190 \cdot 1000 \cdot 177 \cdot 10^{-6}} \cdot 20 = 29,0 \text{ сек}.$$

Превышение температуры наиболее нагретой точки проводника через 15 сек после начала форсировки

$$\Theta_{\text{макс}} = 13,0 + 13,0 (4 - 1) \frac{15}{29} = 33,2^\circ \text{ С}.$$

Уточненный расчет по рекуррентным формулам. Выбираем расчетный промежуток времени $\Delta t = 0,05L/\omega = 0,05 \frac{20}{3} = 0,333 \text{ сек}$, полагая, что длина участков, на которые разделен проводник, составляет $\Delta L = 0,333 \cdot 3 = 1 \text{ м}$.

Вычисляем коэффициенты, которые входят в рекуррентные формулы:

$$m = \frac{4190 \cdot 1000 \cdot 177 \cdot 10^{-6}}{13 \cdot 10^3 \cdot 47 \cdot 10^{-3} \cdot 0,333} = 3,57;$$

$$\sigma = \frac{4190 \cdot 1000 \cdot 177 \cdot 10^{-6}}{390 \cdot 8900 \cdot 723 \cdot 10^{-6}} = 0,296;$$

$$\varphi = \frac{5800 - 1450}{390 \cdot 8900 \cdot 723 \cdot 10^{-6} + 4190 \cdot 1000 \cdot 177 \cdot 10^{-6}} = 1,34;$$

$$A_n = \frac{2 \cdot 3,57 + 1}{2 \cdot 3,57 + 1 + 0,296} \cdot 1,34 \cdot 0,333 = 0,431;$$

$$A_c = \frac{1}{2 \cdot 3,57 + 1 + 0,296} \cdot 1,34 \cdot 0,333 = 0,053;$$

$$B_n = \frac{2 \cdot 3,57 + 1 - 0,296}{2 \cdot 3,57 + 1 + 0,296} = 0,931;$$

$$B_c = \frac{2 \cdot 3,57 - 1 + 0,296}{2 \cdot 3,57 + 1 + 0,296} = 0,763;$$

$$C_n = 1 - 0,931 = 0,069;$$

$$C_c = 1 - 0,763 = 0,237.$$

Рекуррентные формулы имеют вид:

$$\begin{cases} \Theta_{k,i} = 0,431 + 0,931\Theta_{k-1,i} + 0,069\vartheta_{k-1,i-1}; \\ \vartheta_{k,i} = 0,053 + 0,763\vartheta_{k-1,i-1} + 0,237\Theta_{k-1,i}. \end{cases}$$

Начальные условия сведены в табл. 14-4.

Таблица 14-4

i	ϑ_{0i}	Θ_{0i}	i	ϑ_{0i}	Θ_{0i}
0	0	0	11	6,82	9,17
1	0,32	2,67	12	7,47	9,82
2	0,97	3,32	13	8,12	10,47
3	1,62	3,97	14	8,17	11,12
4	2,27	4,62	15	9,42	11,77
5	2,92	5,27	16	10,07	12,62
6	3,57	5,92	17	10,72	13,07
7	4,22	6,57	18	11,37	13,72
8	4,87	7,22	19	12,02	14,37
9	5,52	7,87	20	12,67	15,02
10	6,17	8,52			

Результаты расчета показаны на рис. 14-23.

Пример 2. Определить промежуток времени, за который максимальная температура обмотки турбогенератора с непосредственным водородным охлаждением повысится вследствие 1,5-кратной перегрузке по току на 20°C по сравнению с начальной установившейся температурой.

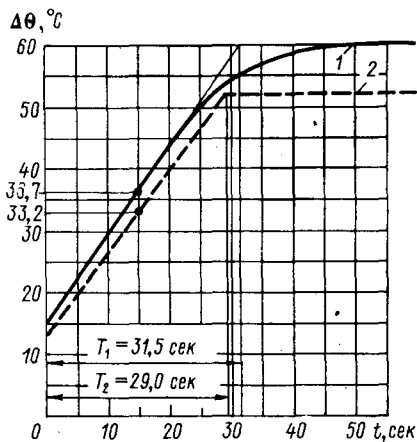


Рис. 14-23. Нарастание температуры в обмотке с водяным охлаждением
1 — точный расчет; 2 — приближенный расчет

Исходные данные: суммарные потери в обмотке 1200 квт, вес обмотки 6150 кгс, число однотипных параллельных каналов в роторе 3528; длина канала $L=0,47$ м, периметр $\Pi=26 \cdot 10^{-3}$ м, сечение $S_c=80 \cdot 10^{-6}$ м², скорость газа $\omega=40$ м/сек, расход $Q=3,2 \cdot 10^{-3}$ м³/сек, коэффициент теплообмена $\alpha=920$ вт/(м² × град), теплоемкость $c_c=c_{pyc}=4,4$ дж/(м³ · град).

Расчет. Кратность увеличения потерь $k_p=1,5^2=2,25$.

Начальные удельные потери на единицу длины канала

$$P_{нач} = \frac{1200 \cdot 10^3}{3528 \cdot 0,47} = 725 \text{ вт/м.}$$

Вес участка обмотки, охлаждаемого одним каналом:

$$G_{\Pi} = \frac{6150}{3528} = 1,74 \text{ кгс.}$$

Установившееся начальное превышение температуры обмотки

$$\Theta_{y0} = \frac{725}{920 \cdot 26 \cdot 10^{-3}} + \frac{725 \cdot 0,47}{4,4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}} = 54,4^\circ\text{C.}$$

Постоянная времени

$$T = \frac{390 \cdot 0,74}{920 \cdot 0,47 \cdot 0,026} \left(1 + \frac{920 \cdot 0,026 \cdot 0,47}{4,4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}} \right) = 108 \text{ сек.}$$

По условию $\Theta = \Theta_{y0} + 20^\circ\text{C}$, поэтому на основании формулы имеем:

$$54,4 + 20 = 54,4 + 54,4 (2,25 - 1) (1 - e^{-t/108}),$$

откуда $t=38$ сек.

СИСТЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН РАЗНЫХ ТИПОВ

Глава пятнадцатая ТУРБОГЕНЕРАТОРЫ

15-1. Системы охлаждения турбогенераторов

Известно, что турбогенераторы являются основными энергетическими машинами. В настоящее время генераторами этого типа вырабатываются примерно 80% всей электроэнергии. Развитие атомной энергетики усиливает эту тенденцию.

В то же время турбогенераторы несомненно наиболее напряженные в тепловом отношении электрические машины. Весьма значительная единичная мощность, реализуемая в ограниченном объеме машины, обуславливает возникновение удельных тепловых потоков около 200 квт/м³. Для удаления в окружающую среду столь большого количества тепла системы охлаждения турбогенераторов должны обладать высокой эффективностью.

Другим важнейшим требованием к системам охлаждения является требование высокой надежности работы в эксплуатационных режимах. Это означает, что весь комплекс охлаждающих устройств турбогенератора должен быть спроектирован и осуществлен таким образом, чтобы в конструкцию машины не вводились элементы, нарушающие механическую прочность, гидравлическую плотность и, разумеется, термическую устойчивость, понимаемую как способность выдерживать тепловые перегрузки, предусмотренные нормами эксплуатации.

Не менее важно обеспечивать приемлемый уровень затрат энергии на осуществление процесса охлаждения. Коэффициент полезного действия мощных турбогенераторов находится в диапазоне значений 98,8—98,9. Следовательно, в системе охлаждения машины должно расходоваться не более 0,1—0,2 ее номинальной мощности.

Таким образом системы охлаждения турбогенераторов, будучи экономичными, должны в то же время обеспечивать резерв повышения температуры и минимальную разность температур самых нагретых и самых охлажденных точек машины. Отсюда становится понятным происхождение большого числа различных вариантов систем, которые осуществлялись в разное время и разными фирмами в поисках наиболее рациональных решений.

Все системы охлаждения турбогенераторов разделяются на два принципиально различных класса: системы с косвенным и системы с непосредственным охлаждением. В классе систем непосредственного охлаждения нередко применяется косвенное охлаждение отдельных элементов.

Другим существенным отличительным признаком является род применяемой охлаждающей среды. По этому признаку производят деление на системы газового охлаждения и системы жидкостного охлаждения.

На рис. 15-1 приведена классификация систем охлаждения турбогенераторов. Системы непосредственного охлаждения пронумерованы, причем типичные значения коэффициентов использования сведены в табл. 15-1, где выдержана та же нумерация.

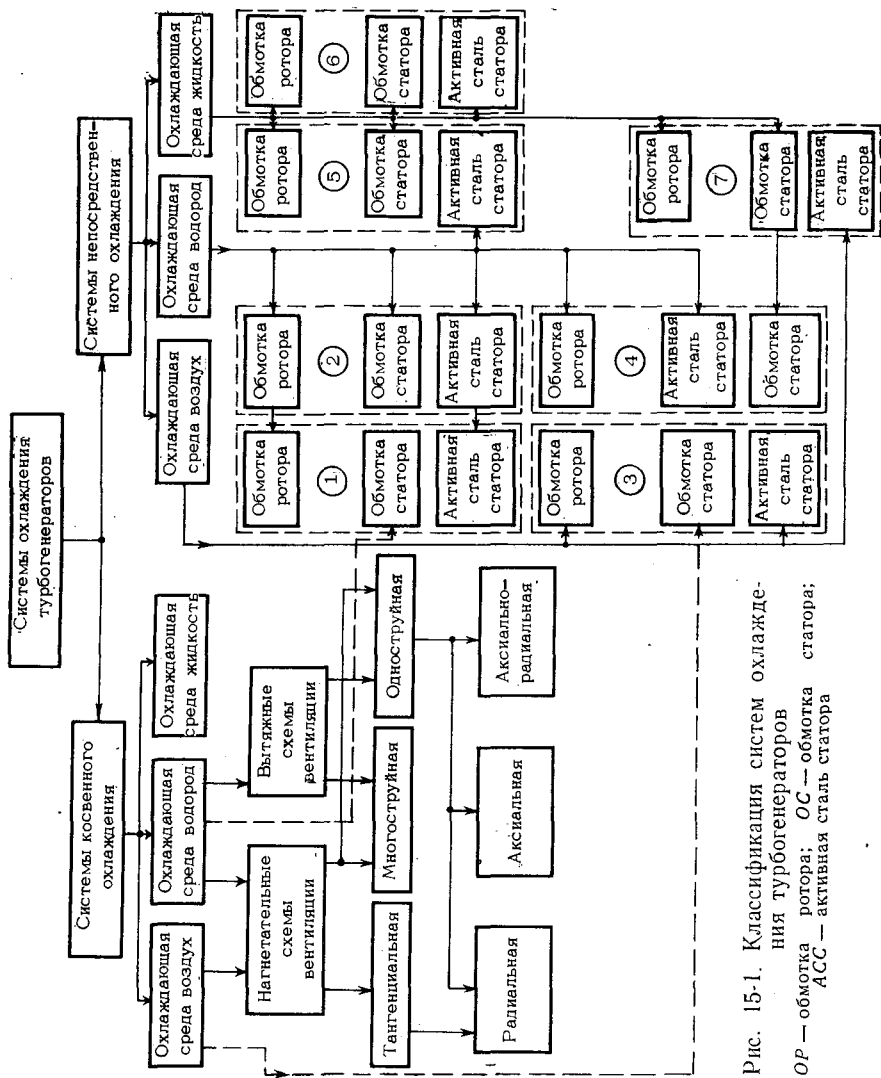


Рис. 15-1. Классификация систем охлаждения турбогенераторов
 ОР — обмотка ротора; ОС — обмотка статора; АСС — активная сталь статора

Таблица 15-1

Система охлаждения	Применяемая охлаждающая среда	Коэффициент использования	
Системы косвенного охлаждения	Воздух	5,0	
	Водород	6,2	
	Вода	6,5	
Системы непосредственного охлаждения	1	на рис. 15-1	11,0
	2		8,75
	3		5,5
	4		12,0
	5		17,6
	6		18,0
	7		14,0

15-2. Охлаждение статора

Обмотки якорей (статоров) мощных турбогенераторов обычно охлаждаются водой. Особенности этого вида охлаждения достаточно подробно рассмотрены в главе о непосредственном охлаждении (гл. 14), выводы которой

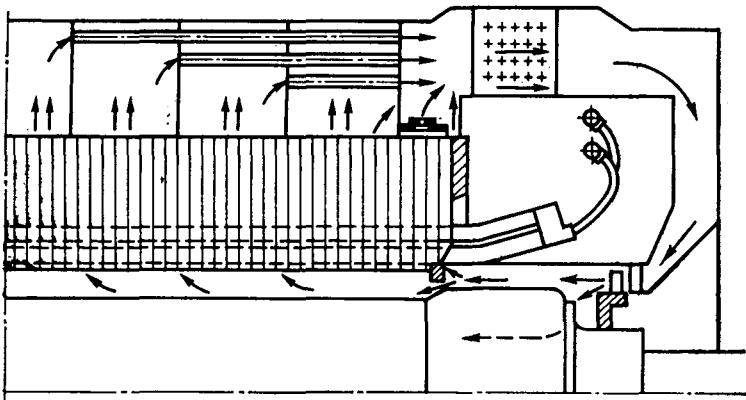


Рис. 15-2. Одноструйная нагнетательная схема вентиляции

без каких бы то ни было оговорок могут быть распространены на условия эксплуатации обмоток турбогенераторов.

Сердечники статоров охлаждаются водородом повышенного давления. Основными схемами вентиляции являются: многоструйная нагнетательная (рис. 6-3, б), одноструйная вытяжная (рис. 6-4, б), одноструйная нагнетательная (рис. 15-2) и тангенциальная (рис. 6-4, в).

Главным отличием многоструйных схем от одноструйных является то обстоятельство, что в многоструйных охлаждающий газ в половине радиальных вентиляционных каналов сердечника направлен к ротору (центростремительное направление), а в половине каналов — к периферии (центробеж-

ное направление). Таким образом, скорость газа в вентиляционных каналах многоструйных сердечников вдвое больше, чем в одноструйных. Расход газа при этом не уменьшается (полагаем компрессор неизменным), поскольку в отличие от одноструйных схем в многоструйных схемах осевая скорость в зазоре значительно меньше скорости в каналах и поэтому потери напора в зазоре пренебрежимо малы.

Увеличение скорости движения газа в каналах сердечника несомненно положительно влияет на эффективность его охлаждения. Здесь, однако, требуется более детальный анализ ситуации, позволяющий оценить влияние не только средней величины скорости, но и неравномерности поля скоростей.

Как показывает многолетний опыт турбогенераторостроения, многоструйное исполнение сердечников приводит к практически равномерному распределению расхода газа между отдельными отсеками. С разницей скоростей в каналах в пределах одного отсека также можно не считаться. Это на первый взгляд целесообразное распределение охлаждающей среды ограничивает применение многоструйных схем при увеличении единичной мощности турбогенераторов. Дело в том, что потери, выделяемые в активной стали, распределены по объему сердечника неравномерно. В числе других направлений неравномерность наблюдается и в осевом направлении. Потoki рассеяния создают в торцовых зонах машины повышенные значения индукции во всех магнитных элементах конструкции, в результате чего крайние пакеты сердечника требуют более эффективного охлаждения. Следует заметить, что создание целенаправленной неравномерности распределения скоростей в какой-либо системе каналов — задача подчас более сложная, чем обеспечение равномерного распределения. В частности, в многоструйной схеме практически нет возможности увеличить скорость газа в торцовых (крайних) вентиляционных каналах. Такую возможность предоставляет вытяжная одноструйная схема.

Как было выяснено в гл. 7, вытяжные схемы распределения тем более неравномерны, чем большую роль играет сопротивление сборного канала (в данном случае зазора турбогенератора). Из рис. 7-9 можно видеть, что кривая распределения имеет резко выраженный максимум в крайних каналах, т. е. представляется целесообразной с точки зрения рационального охлаждения сердечника.

Опыт применения одноструйных схем показывает, однако, что при большом числе вентиляционных каналов неравномерность распределения скоростей оказывается чрезмерной по двум причинам. Во-первых, скорости газа в средних каналах сердечника нельзя уменьшать до произвольной величины, чтобы не увеличивать температуру средних пакетов стали сверх допустимого уровня. Во-вторых, весьма неравномерная подача охлаждающей среды в зазор вредна для ротора. Оба указанных недостатка одноструйной схемы могут быть устранены путем применения пакетов стали различной толщины.

Разнотолщинность пакетов сердечника позволяет при неизменном суммарном сечении вентиляционных каналов распределить их таким образом, чтобы в среднюю часть зазора подавалось необходимое количество газа и превышение температуры удерживалось на заданном уровне.

Методика расчета толщины пакетов сводится в своей основе к следующему. Отношение расходов на единицу длины оси в зонах крайних и средних каналов $\bar{v} = v_N / v_1$ определяется на основе формулы (7-40). Для выравнивания расходов число каналов в средней части машины должно быть увеличено в таком же отношении. Это, в свою очередь, означает, что толщина пакетов средней зоны должна быть в указанное число раз уменьшена.

Пусть, например, средняя (заданная в первоначальном варианте проекта) толщина пакета 45 мм и пусть вычисленная по формуле (7-40) неравномерность $\bar{v} = 5,0$.

Для расчета разнотолщинности можно принять, что зависимость скорости от номера канала будет такой же как и для однотипных ответвлений. При таком допущении количество пакетов каждой группы может быть определено исходя из заданного распределения расхода газа в зазоре. Пусть

для рассмотренного примера (рис. 15-3) необходимо ограничить избыток расхода к примыкающей к торцам зоне T величиной $Q_T/Q_C=K=1,35$. Тогда число тонких пакетов можно найти из графика распределения при новом способе шихтовки сердечника. Рис. 15-3 демонстрирует путь конкретного расчета. Кривая истинного распределения заменяется аппроксимирующей прямой I для участка от оси генератора до крайних каналов (их обычно два или три), принимаемого за 100% длины. Площадь полученной трапеции $ABCD$ в определенном масштабе изображает суммарный расход газа, поступающий в зазор. Эта же величина изображается площадью прямоугольника $AB'C'D$, равновеликого трапеции. Площадь треугольника OBB' представляет недостаток расхода газа, в средней зоне C (по сравнению со средним расходом). Площадь треугольника OCC' представляет избыток расхода в торцевой зоне T . Линия OM является средней в системе распределения. Отношение расходов в зонах T и C при заданной в нашем примере неравномерности скоростей ($v'=5,0$) равно, как видно из рисунка, отношению площадей:

$$\begin{aligned} \frac{Q_T}{Q_C} &= \frac{s_{OMDC}}{s_{OMAB}} = \\ &= \frac{\frac{1 + \bar{v}'}{2} + \bar{v}'}{\frac{1 + v'}{2} + 1} = 2. \end{aligned}$$

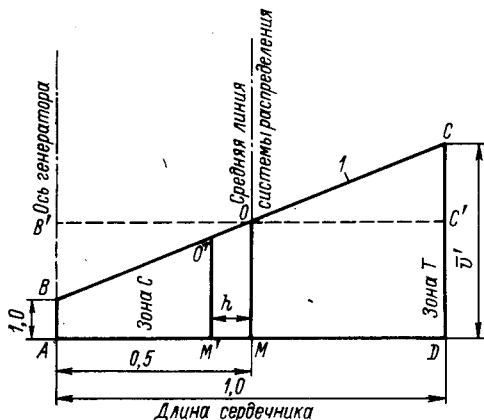


Рис. 15-3. К расчету разнотолщинности

Изменить расходы в зонах T и C путем изменения числа вентиляционных каналов в них — это значит сместить среднюю линию системы OM в сторону средней линии машины в новое положение $O'M'$ на величину $M'M=h$. Действительно, большее число каналов в зоне C (с меньшей скоростью газа в них) и меньшее число каналов в зоне T (с большей скоростью в них) создадут более равномерное распределение расхода между зонами.

Итак, для приближенного определения величины h можно принять, что расход в зоне T уменьшается на площадь $\Delta s = OMM'O'$ и на эту же величину увеличится расход в зоне C . Тогда

$$K = \frac{Q_T - \Delta s}{Q_C + \Delta s}; \quad \Delta s = \frac{Q_T - KQ_C}{K + 1} = \frac{\left[\frac{1 + \bar{v}'}{2} + \bar{v}' - \frac{1 + \bar{v}'}{2} + 1 \right]}{K + 1}$$

Высота трапеции $OMM'O'$ примерно равна $\frac{1 + \bar{v}'}{2}$. Отсюда $h =$

$$= \frac{\Delta s}{\frac{1 + \bar{v}'}{2}} = 0,1.$$

Толщина пакетов δ_0 должна быть увеличена в зоне T в отношении $\frac{0,5}{0,5 - h}$ равном в нашем случае 1,25, т. е. $\delta' = 1,25$, $\delta_0 = 55$ мм. Толщина

пакетов в зоне C должна быть уменьшена в отношении $\frac{0,5}{0,5 + h}$, равном 0,83, т. е. $\delta'' = 37$ мм. При таком соотношении расход газа в торцевой зоне T превосходит расход в средней зоне C лишь в 1,35 раза, причем скорость по-прежнему увеличивается в направлении к торцам. Применение пакетов промежуточной толщины на стыке зон T и C (например, исходной толщины 45 мм) позволяет в еще большей мере приблизить распределение расхода к желаемому.

Остается добавить, что самые крайние пакеты в связи с максимальными потерями в торцевой зоне всегда должны иметь минимальную толщину. Что же касается пакетов средней зоны машины, то их температура при изложенном выше способе шихтовки практически не будет отличаться от температуры пакетов зоны T , так как меньшая скорость газа в вентиляционных каналах компенсируется меньшей толщиной пакетов.

На рис. 15-4 и в табл. 15-2 приведены результаты расчета разнотолщинности сердечника машины мощностью 300 Мвт.

Таблица 15-2

Номера участков сердечника	Число пакетов в участке	Номера пакетов (от торца сердечника)	Толщина пакетов, мм
1, 13	2	1—2, 110—111	28
2, 12	15	3—17, 95—109	60
3, 11	13	18—30, 82—94	58
4, 10	5	31—35, 77—81	49
5, 9	10	36—45, 67—76	42
6, 8	5	46—50, 62—66	37
7	11	51—61	30

Изменение максимальной температуры стали статора в зависимости от толщины пакета связано с изменением трех составляющих превышения: перепада температуры по толщине пакета пропорционально квадрату толщины, подогрева газа и перепада с поверхности пакета пропорционально толщине пакета. Лимитирующим является превышение температуры пакета максимальной толщины, расположенного вблизи торца сердечника. Это превышение не должно быть больше исходного превышения (в среднем пакете), т. е.

$$\left(\frac{\delta_{\max}}{\delta_0}\right)^2 \Delta\theta + \left(\frac{\delta_{\max}}{\delta_0}\right) \frac{\bar{v}'}{2} (\Delta\vartheta_{\Gamma} + \Delta\vartheta_{\alpha}) < \Delta\theta + \frac{\bar{v}'}{2} (\Delta\vartheta_{\Gamma} + \Delta\vartheta_{\alpha}),$$

где $\Delta\theta$ — перепад температуры в пакете исходной толщины; $\Delta\vartheta_{\Gamma}$ — подогрев газа в исходной конструкции при средней скорости газа; $\Delta\vartheta_{\alpha}$ — перепад температуры поверхности и газа.

Отсюда

$$\frac{\delta_{\max}}{\delta_0} < \sqrt{\left(\frac{\bar{v}'}{4\bar{v}'} \bar{\theta}\right)^2 + \frac{\bar{v}'+1}{2} \bar{\theta} + 1} - \frac{\bar{v}'}{4\bar{v}'} \bar{\theta},$$

где $\bar{\theta} = \frac{\Delta\vartheta_{\Gamma} + \Delta\vartheta_{\alpha}}{\bar{\theta}}$

Рассмотрим теперь особенности одноструйной нагнетательной схемы вентиляции сердечника (см. рис. 15-2). Здесь характер распределения скоростей в каналах прямо противоположен целесообразному с точки зрения эффективного охлаждения. По этой причине группы каналов приходится дроссели-

ровать, создавая в каждой из них необходимый уровень скоростей. Применительно к такой задаче был разработан метод расчета дросселирующих труб, показанных на рисунке с внешней стороны сердечника [27].

Следует заметить, что регулирование скоростей методом дросселирования отдельных каналов не является рациональной мерой. Расход энергии на циркуляцию охлаждающей среды в данном случае неоправданно возрастает. Если принять мощность нагнетателей в вытяжной схеме за единицу, то для схемы с дросселированием требуется мощность \bar{v}^2 [см. (7-39)], что выливается в крупных турбогенераторах в сотни киловатт дополнительно затрачиваемой электроэнергии.

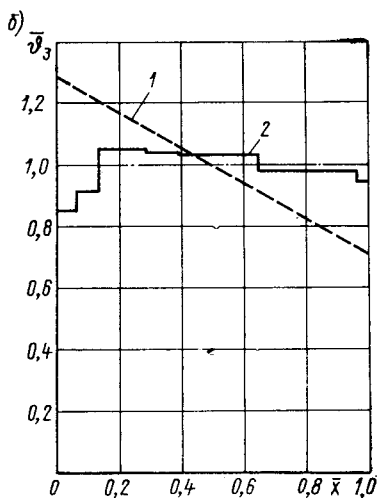
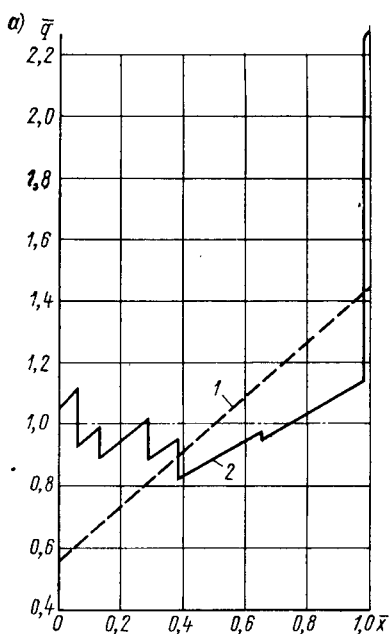


Рис. 15-4. Распределение расхода газа (а) и температуры (б) в зазоре

1 — при неизменной толщине пакетов; 2 — с учетом разнотолщинности

Особый интерес представляют тангенциальные схемы вентиляции сердечников (рис. 6-4, в). Как и в многоструйных схемах скорость в вентиляционных каналах имеет в тангенциальных системах удвоенную величину. Распределение скоростей является практически равномерным, однако корпус статора много проще, чем у многоструйных машин. Следовательно, единственной проблемой, ограничивающей применение тангенциальных схем, является проблема интенсивного охлаждения крайних пакетов сердечника.

Здесь можно отметить следующее. Удвоение величины средней скорости в каналах при равномерном распределении расхода обеспечивает в крайних каналах уровень скоростей того же порядка, что и в одноструйных схемах, обладающих неравномерностью, примерно равной 2 (по отношению к средней скорости).

Однако опыт показывает, что к центру машины скорости несколько уменьшаются. В этом смысле тангенциальные схемы обладают преимуществом перед многоструйными, у которых обычно можно обнаружить некоторое уменьшение скоростей в крайних напорных отсеках статора (т. е. в крайних камерах холодного газа).

15-3. Охлаждение ротора

При газовом (водородном) охлаждении обмоток основными схемами являются: схема диагональной вентиляции с забором газа из зазора (рис. 14-2), схема аксиальной вентиляции (рис. 15-5) и схема радиальной вентиляции (рис. 15-6). В двух последних схемах для подвода газа к радиальным участкам тракта используются подпазовые каналы.

Расчет схемы аксиальной вентиляции выполняется на основе соображений о целесообразной длине канала, изложенных в гл. 14.

Расчет схемы радиальной вентиляции осуществляется с учетом неравномерности распределения расходов, т. е. с использованием формул § 7-6.

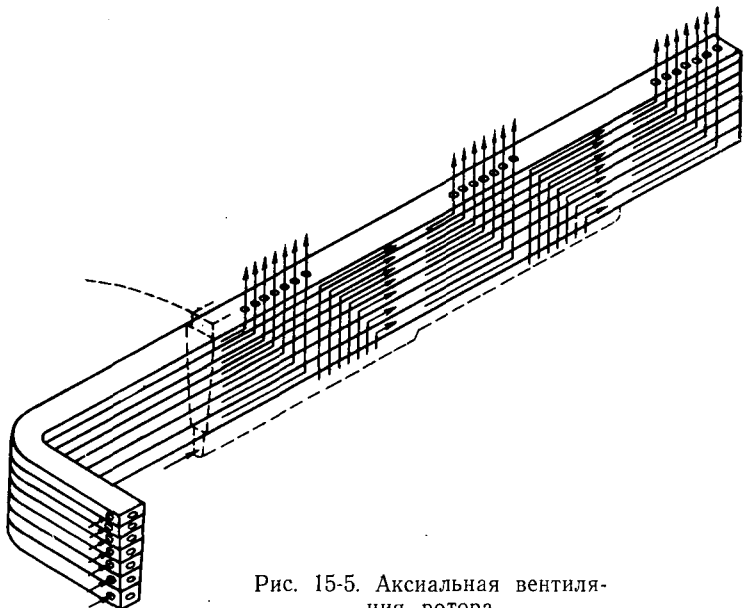


Рис. 15-5. Аксиальная вентиляция ротора

В обоих случаях необходимо иметь в виду принципы выбора рационального сечения каналов, изложенные в гл. 14.

Наибольшую проблему представляет расчет схем диагональной вентиляции, позволяющих получить максимальную единичную мощность турбогенератора при газовом охлаждении.

Физическая ситуация в диагональном канале частично охарактеризована в § 5-2. Подробный анализ теплообмена в системе и его зависимости от температуры газа в зазоре, т. е. от схемы вентиляции статора, проделан в [21]. Зависимость скорости газа от геометрии ротора и параметров режима дана в [64].

Опыт эксплуатации диагональных обмоток показывает, что при повышении абсолютной температуры обмоток (и охлаждающего газа) зависимость скорости в каналах от параметров отклоняется от расчетной, причем в неблагоприятную сторону. Проще говоря, при повышении температуры скорость газа в каналах уменьшается, что приводит к еще большему повышению температуры. Причиной этого явления следует считать изменение (увеличение) вязкости охлаждающего газа при повышении его температуры. При увеличении вязкости уменьшается напор системы заборник — дефлектор и одновременно увеличивается сопротивление каналов. Оба фактора могут быть оценены количественно методами, изложенными в § 8-10 и в [64].

В настоящее время конструкции обмоток возбуждения с водяным охлаждением применительно к мощным турбогенераторам находятся в стадии разработок, исследований и внедрения новых решений. По этой причине многие проблемы, связанные с длительной эксплуатацией таких обмоток, еще не сформулированы.

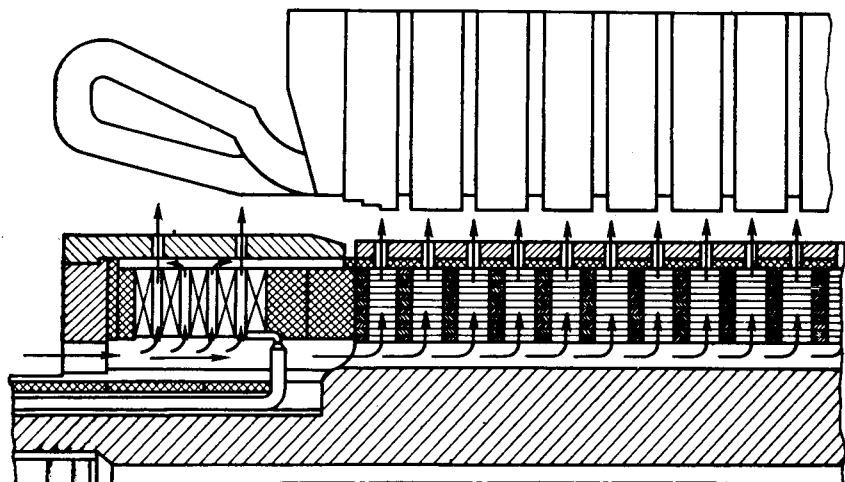


Рис. 15-6. Радиальная вентиляция ротора

В некоторой мере поведение обмоток в стационарных и нестационарных режимах может быть проанализировано на основе материалов гл. 14. Условия возникновения кавитации и ее последствия рассмотрены в гл. 8.

15-4. Проблемы криогенного охлаждения турбогенераторов

Непосредственное охлаждение значительно расширило диапазон единичных мощностей турбогенераторов. В настоящее время считается доказанной принципиальная возможность создания машин мощностью до 2 млн. кВт с водяным охлаждением обмоток возбуждения.

В то же время начаты поисковые работы, направленные на создание систем низкотемпературного охлаждения турбогенераторов с использованием искусственного холода. Эти поиски предполагают, с одной стороны, еще больше увеличить достижимую единичную мощность машин; с другой стороны, считается целесообразным повысить технический уровень сверхмощных турбогенераторов. Особенно привлекательным является использование эффекта сверхпроводимости в обмотках постоянного тока. Некоторые разработки позволяют надеяться, что к. п. д. турбогенератора, работающего совместно с холодильной машиной, окажется весьма высоким.

Большинство работ, посвященных криогенному охлаждению турбогенераторов, носит в основном обзорный характер [10, 14]. По-видимому нет необходимости анализировать еще не вполне утвердившиеся точки зрения по целому ряду новых проблем. Ниже кратко рассмотрены некоторые основные проблемы искусственного охлаждения обмоток.

Энергетические соотношения. Искусственным называется такое охлаждение, при котором охлаждаемый объект приобретает температуру ниже температуры окружающей среды (например, природной воды в реках и водоемах). Такое охлаждение целесообразно лишь в том случае, когда

уменьшение потерь энергии в связи со снижением температуры эксплуатации обмоток превосходит затраты энергии на выработку холода.

Рассмотрим для простоты зависимость потерь от температуры в обмотках постоянного тока. Как известно, в широком диапазоне температур эта зависимость имеет линейный характер $\rho_{\theta} = \rho_0(1 - \beta\Delta\theta)$. Следовательно, выигрыш в потерях при снижении температуры на $\Delta\theta$ составляет $\Delta p = \rho_0 - \rho_{\theta} = \rho_0\beta\Delta\theta$, где β — температурный коэффициент (для меди $\beta = 1/235 \text{ град}^{-1}$).

Затраты энергии на выработку холода определяются принципом работы и степенью технического совершенства холодильной машины и равны $p_x = \rho\theta/\epsilon$ где ϵ — холодильный коэффициент, зависящий от температуры.

Условие целесообразности искусственного охлаждения $\Delta p > p_x$, или $\epsilon > \frac{1}{\beta\Delta\theta} - 1$ изображается на графике (рис. 15-7) в виде зоны приемлемых значений холодильного коэффициента.

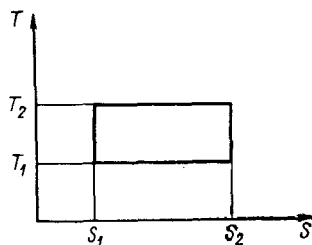
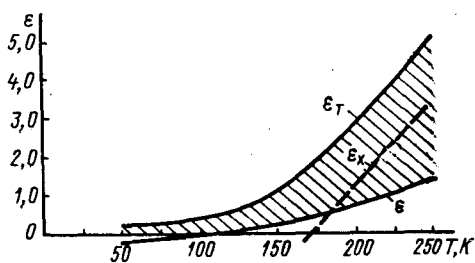


Рис. 15-7. Зависимость холодильного коэффициента от температуры

Рис. 15-8. Теоретический цикл Карно

ϵ_T — теоретические значения холодильного коэффициента; ϵ_x — холодильные коэффициенты реальной холодильной машины

Можно добавить, что использование сверхпроводимости сводит потери в обмотке возбуждения к нулю, так что затраты энергии на выработку холода определяются лишь величиной теплопритоков в низкотемпературную зону из окружающей среды. Что же касается обмоток переменного тока, то применительно к ним целесообразная температура эксплуатации может быть определена лишь с учетом зависимости добавочных потерь от температуры.

Холодильные циклы. Как известно, без затраты энергии температурные процессы могут протекать только при переходе тепла от более нагретого тела к менее нагретому (энтропия системы при этом увеличивается). Чтобы передать тепло окружающей среде от источника, имеющего более низкую, чем среда, температуру, необходимо произвести дополнительную работу, что постулируется вторым началом термодинамики:

невозможно осуществить такой периодически действующий двигатель, в результате действия которого производилась бы положительная работа только за счет охлаждения одного тела без того, чтобы в системе или окружающих телах не произошли одновременно какие-либо другие изменения.

Простейшим обратимым циклом холодильной машины является так называемый обратный цикл Карно, или цикл с двумя источниками тепла, от одного из которых тепло отнимается рабочим телом и передается другому. Оба процесса протекают при неизменных температурах источников. Однако рабочее тело должно изменять температуру, и поскольку других источников нет, то изменение температуры рабочего тела совершается адиабатно. В итоге имеем два адиабатных и два изотермических процесса, что в TS -диаграмме изображается прямоугольником (рис. 15-8).

Холодильный коэффициент цикла Карно ($\epsilon_{\tau} = T_{\text{в}} / (T_{\text{в}} - T_0)$). Кривая, изображающая его зависимость от температуры (рис. 15-7), является предельной для рассмотренного выше диапазона холодильных коэффициентов реальных машин.

Для практического анализа холодильных машин целесообразно пользоваться образцовыми циклами с изменяющимися температурами источников и минимальной затрачиваемой работой [58]. Такой подход приводит к мысли о целесообразности активного экранирования низкотемпературной зоны. Например, для температуры порядка 4°K в литературе в качестве оптимальных названы температуры активных экранов 65 и 180°K [45].

Добавим, что холодильная машина с испарителем в форме обмоток электрической машины никак не может рассматриваться в отрыве от последней. Это означает, что специалисты в области теплообмена в электрических машинах должны анализировать циклы холодильных машин совместно со специалистами по криогенной технике.

Можно не сомневаться, что турбогенераторы с криогенным охлаждением, если они будут созданы, будут иметь холодильную машину в качестве элемента, органически входящего в общую конструкцию.

Интенсивность испарительного охлаждения. Поток кипящей жидкости состоит из смеси жидкости и пара, т. е. является двухфазным потоком. Известны два основных режима кипения на поверхности нагрева: пузырьковое и пленочное. При пузырьковом кипении основная часть поверхности нагрева омывается жидкостью, которая перемешивается отрывающимися паровыми пузырями. Вследствие этого интенсивность теплообмена со стенками канала весьма велика.

При пленочном кипении пар образует слой, отделяющий стенки канала от массы жидкости. Интенсивность теплообмена в этом случае во много раз меньше. Режим кипения определяется плотностью теплового потока с поверхности канала.

При увеличении теплового потока q (рис. 15-9) до некоторой величины (точка А) возникает кризис теплообмена при кипении и паровое кипение скачком переходит в пленочное. Коэффициент теплообмена уменьшается при этом в 20—30 раз.

Обратный переход к пузырьковому кипению (точка Б) происходит при значительно меньшем тепловом потоке, чем переход к пленочному кипению.

Оценку интенсивности теплообмена при кипении обычно производят по методу С. С. Кутателадзе [37] на основе интерполяционной формулы:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_{00}}{\alpha_0}\right)^2},$$

где α — искомый коэффициент теплообмена; α_0 — коэффициент теплообмена при вынужденной конвекции (движение с данной скоростью в отсутствие кипения); α_{00} — коэффициент теплообмена при кипении в большом объеме.

Для оценки критической величины теплового потока $p_{\text{кр}}$ служит решение Кутателадзе:

$$\frac{p_{\text{кр}}}{r \sqrt{g \gamma_{\text{п}} \left(1 + \frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma}\right)} \sqrt[4]{\sigma (\gamma - \gamma_{\text{п}})}} = \text{const},$$

где γ , $\gamma_{\text{п}}$ — удельный вес жидкости и пара; σ — поверхностное натяжение.

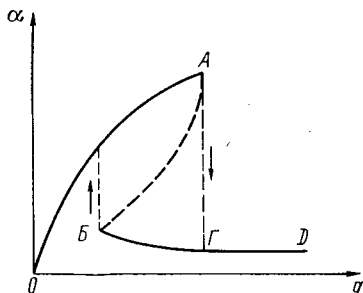


Рис. 15-9. Зависимость коэффициента теплообмена от тепловой нагрузки

Укажем, что критическая величина теплового потока для воды, например, примерно 145 вт/см^2 ; для гелия 1 вт/см^2 . Отсюда очевидна высокая эффективность испарительного охлаждения обмоток.

Глава шестнадцатая

ГИДРОГЕНЕРАТОРЫ

16-1. Вводные замечания

Коэффициенты использования гидрогенераторов достигли в последние годы весьма высоких значений ($C_{\Sigma}=14$ в машине мощностью 500 Мвт). При этом линейные нагрузки превысили 1000 а/см плотность тока в обмотке якоря составляет примерно $7,5 \text{ а/мм}^2$, в обмотке возбуждения — примерно $4,5 \text{ а/мм}^2$. Все эти данные характеризуют системы охлаждения гидрогенераторов как достаточно эффективные.

Общий прогресс методов проектирования оказал влияние и на уровень выполнения теплового и вентиляционного расчетов. Последний из них приобрел основное значение в общем анализе систем охлаждения, поскольку тепловой расчет гидрогенераторов в основном не отличается от расчета крупных синхронных машин (см. гл. 18). Есть и другие причины, усиливающие роль вентиляционного расчета, в первую очередь, существенное влияние его результатов на уровень к. п. д. генератора.

Основы вентиляционного расчета гидрогенераторов с учетом рециркуляционных контуров изложены в гл. 6, 7. Результаты весьма важных и содержательных исследований действующих машин и моделей проанализированы в [4]. Некоторые полезные данные содержатся в [64].

В то же время опыт наладки и эксплуатации систем охлаждения некоторых гидрогенераторов в диапазоне мощностей $175\text{—}500 \text{ Мвт}$ позволил обнаружить проявление таких особенностей вентиляционных схем, которые не могут быть объяснены традиционными расчетами. Речь идет в первую очередь о соотношении аэродинамических сопротивлений неподвижных и вращающихся элементов схемы вентиляции и о некоторых помпажных явлениях, которые становятся заметными при неблагоприятных соотношениях сопротивлений системы спиц ротора (звезды) и сопротивлений вентиляционных каналов обода ротора и сердечника статора.

Исследованию этих особенностей посвящена настоящая глава.

16-2. Анализ направленности потоков охлаждающего воздуха в зоне полюсных окон ротора

Характер распределения скоростей воздуха в вентиляционных каналах статора заставляет предполагать, что в зоне полюсных окон ротора вектор скорости направлен параллельно оси вращения машины из камер лобовых частей обмотки статора в сторону среднего сечения машины (т. е. из нижней камеры вверх, из верхней камеры вниз). К этому же выводу приводит и анализ величины статического давления в камерах лобовых частей и в полюсных окнах. Непосредственное моделирование исследуемых потоков также подтверждает сформулированное предположение [4].

Между тем вентиляционный расчет, учитывающий потоки рециркуляции через неплотности, т. е. исходящий из реальных схем вентиляции (гл. 6) всех построенных гидрогенераторов, приводит к прямо противоположному результату, если в расчете принимать сопротивление вращающихся каналов равным сопротивлению неподвижных. Так расчет большой серии гидрогенераторов разных типов, в котором аэродинамические сопротивления каналов обода ротора принимаются в соответствии с рекомендациями расчетных ме-

тодов, изложенных в названной выше литературе, приводит к необходимости изменить направление потоков воздуха в зоне полюсных окон на противоположное для получения сходящейся системы уравнений.

Следует подчеркнуть, что потоки рециркуляции измерены не менее тщательно, чем скорости воздуха в каналах сердечника. Неучет потоков рециркуляции в настоящее время попросту немислим, поскольку в этом случае было бы невозможно правильно определить вентиляционные потери (см. гл. 10).

Возможность надежно оценивать рециркулирующие расходы охлаждающего воздуха является не единственным результатом исследований последнего времени. Удалось более точно определить внешние аэродинамические характеристики торцовых нагнетательных элементов — вентиляторов и полюсов. Этому способствовал уникальный по постановке эксперимент на машинах мощностью 225 и 500 *Мвт*, у которых были перекрыты вентиляционные каналы обода ротора частично и полностью (при наличии вентиляторов и при снятых вентиляторах). Как очевидно, единственными напорными элементами машин в указанных экспериментах служили вращающиеся торцовые части роторов, что позволяло определить их внешнюю характеристику. Оказалось, что напор торцов гораздо выше предполагавшегося. В генераторе мощностью 225 *Мвт* торцы обеспечивают 77% расхода, в генераторе 500 *Мвт* 75% расхода.

Введение в вентиляционный расчет истинных напоров торцов и истинных аэродинамических сопротивлений контуров рециркуляции привело к такому представлению о направленности потоков в полюсных окнах (от среднего сечения машины к камерам лобовых частей), которое противоречило всем другим опытным и расчетным данным.

Чтобы устранить указанное противоречие, оказалось необходимым учесть в расчете увеличение аэродинамических сопротивлений вентиляционных каналов обода, связанное с фактором вращения этих каналов.

16-3. Экспериментальное определение аэродинамического сопротивления вращающихся вентиляционных каналов обода ротора

Поскольку образование присоединенных вихрей при движении среды во вращающихся радиальных каналах имеет сложную физическую природу (гл. 8) и сопротивление трения существенно зависит от формы канала, включая форму входа и выхода, оказалось целесообразным экспериментально определить суммарное аэродинамическое сопротивление каналов обода ротора мощного гидрогенератора. Эксперимент был поставлен в 1969 г. на заводе «Электросила» применительно к каналам машин большой мощности с учетом устойчивой геометрии всей вращающейся зоны схемы вентиляции.

Конструкция рабочей части модели имела две пары диаметрально расположенных каналов: пару кольцевых и пару радиальных (кольцевые каналы между шихтованными пакетами обода были также ориентированы радиально с точки зрения направления движения воздуха; радиальные каналы были образованы смещением листов стали при шихтовке в тангенциальном направлении). Расход воздуха в каналах при их вращении измерялся при помощи специально изготовленных измерителей калориметрического типа и типа термоанемометров.

Метод исследования сводился к следующему. В неподвижном положении модели измерялось аэродинамическое сопротивление обоих типов каналов в широком диапазоне изменения расхода воздуха. Затем при тех же значениях расхода измерялось аэродинамическое сопротивление каналов в условиях вращения. Результат измерений выражался в форме зависимости сопротивления от отношения переносной скорости к относительной $z = z/z_0 = f(u/w)$.

Для получения разных расходов в канале при какой-либо фиксированной скорости вращения применялись добавочные сопротивления на входе и выходе, причем тарирование по расходу осуществлялось совместно с

добавочными сопротивлениями. Суть несколько своеобразной методики измерений наглядно демонстрируется графиками на рис. 16-1.

Как видно из рисунка, любое фиксированное сопротивление нити термометра соответствует определенному значению расходной составляющей скорости, которое дается статическими тарировочными кривыми 1, 2, 3 (при данных добавочных сопротивлениях). Здесь же нанесена зависимость θ сопротивления нити от скорости вращения при полностью закрытом канале (динамическая тарировочная кривая).

Если теперь нанести на график зависимости 1, 2, 3 сопротивления анемометра от скорости вращения при той или иной степени открытия канала (т. е. при разных добавочных сопротивлениях), то изменению сопротивления датчика при фиксированной скорости вращения от 0 до 1' будет соответствовать приращение скорости $\Delta\omega$. Это приращение как раз и представляет

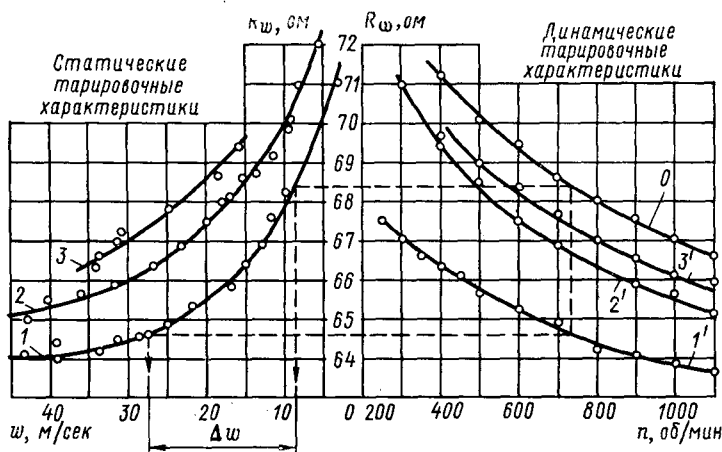


Рис. 16-1. Тарировочные кривые

значение расходной составляющей скорости в канале при его вращении. Что же касается располагаемого напора, то он в данном случае строго равен теоретическому значению $\frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2)$.

Результаты изменения аэродинамического сопротивления в отдельности для кольцевых и радиальных каналов представлены на рис. 16-2. Как можно видеть, при вращении сопротивление каналов увеличивается значительно.

Полученный результат, весьма радикально влияющий на расчетную картину распределения потоков газа в машине, находится в соответствии с основными положениями теории сопротивления вращающихся каналов. В самом деле, определим, например, увеличение коэффициента трения для случая кольцевого канала гидрогенератора, имеющего скорость вращения 125 об/мин. Будем иметь $R_0 = 0,2$; $Re = 1,5 \cdot 10^4$. Отсюда (8-32).

$$\bar{\lambda} = 10^2 \frac{R_0}{Re} + 0,1 R_0^{0,2} Re^{0,5} = \frac{0,2}{1,5} 10^{-2} + 0,1 \cdot 0,2^{0,2} \sqrt{1,5 \cdot 10^4} = 8,8.$$

Из графика на рис. 16-2, б для $u/\omega = 6$ получим $\bar{z} = 12$. Учитывая увеличение сопротивлений входа и выхода при вращении, соответствие можно считать удовлетворительным.

Однако более весомым доказательством достоверности полученных результатов следует считать то обстоятельство, что вентиляционный расчет, основанный на скорректированных значениях аэродинамических сопротивле-

ний, дает в своем итоге картину распределения частичных расходов и величину вентиляционных потерь, весьма близко совпадающие с данными многочисленных измерений, выполненных на действующих машинах.

Так, например, при учете изменения \bar{z} для гидрогенератора мощностью 225 Мвт получаем полезный расход 136 м³/сек; расход рециркуляции 120 м³/сек; вентиляционные потери 1420 квт. Соответствующие измеренные величины равны: 132 м³/сек, 115 м³/сек и 1550 квт. Направления потоков также не противоречат экспериментальным данным.

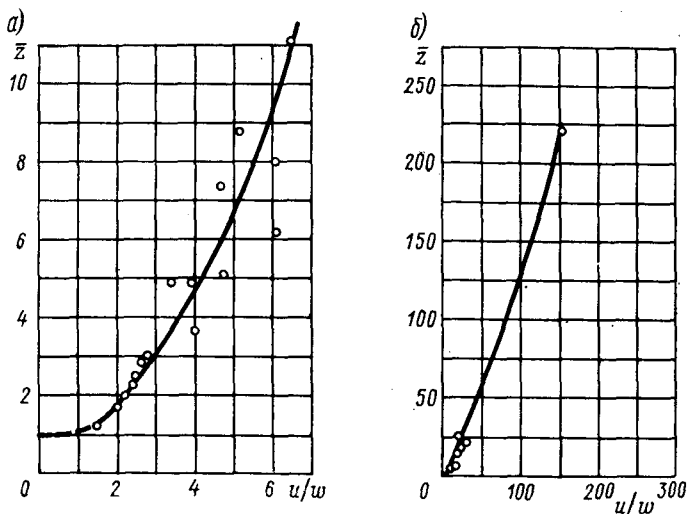


Рис. 16-2. Зависимость сопротивления радиальных (а) и кольцевых (б) каналов от фактора вращения

В заключение заметим, что вентиляционный расчет гидрогенератора мощностью 500 Мвт, приведенный в гл. 6 в качестве примера, выполнен с учетом возрастания аэродинамического сопротивления при вращении каналов.

16-4. Помпаж в схемах вентиляции гидрогенераторов

Помпаж — это неустойчивый режим циркуляции жидкости или газа, сопровождающийся резкими колебаниями давления и расхода и наличием обратных перетеканий среды. Обычно он проявляется в центробежных нагнетателях (вентиляторах и насосах) в режимах работы с малой подачей (расходом) на сеть высокого сопротивления. Сущность явления сводится к тому, что нагнетатель при заданной скорости вращения и имеющих геометрических размерах колеса (в первую очередь при определенной ширине лопаток) всасывает в колесо в единицу времени такое количество среды, которое не может быть передано через сеть высокого сопротивления при сравнительно умеренных располагаемых давлениях нагнетателя. Результатом являются обратные течения в самом колесе и во всей схеме до нагнетателя и резкие колебания давления. По этой причине аэродинамические характеристики вентиляторов и компрессоров даются обычно не до нулевого расхода, причем зона малых расходов при больших сопротивлениях считается помпажной (рис. 16-3). Физическая суть явления помпажа должна быть хорошо понятной после усвоения материала гл. 8.

Явление помпажа отчетливо зафиксировано в схемах вентиляции некоторых гидрогенераторов мощностью 100 Мвт, 175 Мвт и 500 Мвт. Оно

проявляется в форме колебаний давления в схемах вентиляции и в наличии встречных течений в зоне входа охлаждающего воздуха в звезду ротора, а в предельном случае в форме самопроизвольной перестройки схемы на одностороннюю подачу воздуха в ротор.

Последний случай наиболее ярко характеризует физическую ситуацию в системе. Представим себе, что спицы ротора, являясь весьма мощными и крупнорасходными нагнетателями, никак не дросселированы на входе в звезду (т. е. снизу и сверху машины при обычной вертикальной установке гидрогенератора). Так, например, рациональным для спиц гидрогенератора мощностью 500 Мвт при имеющейся быстроходности и геометрических параметрах звезды является расход порядка 400—450 м³/сек. В то же время вентиляционная система самой машины является сетью достаточно большого сопротивления и вызывает потери напора, соизмеримые с располагаемым напором тех же спиц, уже при расходе около 150—200 м³/сек.

Возникающее противоречие устраняется в машине автоматически следующим своеобразным способом. Большой расход воздуха начинает циркулировать мимо основных аэродинамических сопротивлений схемы вентиляции, т. е., проще говоря, мимо самой машины. Пути новой (как бы присоединенной) циркуляции служат между корпусом генератора и внутренней стенкой шахты (рис. 16-4). Таким образом устанавливается сле-

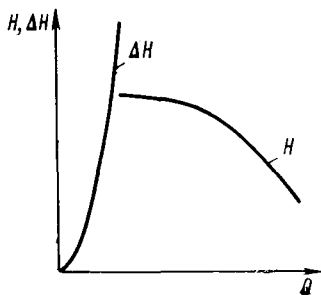


Рис. 16-3. Помпажная характеристика

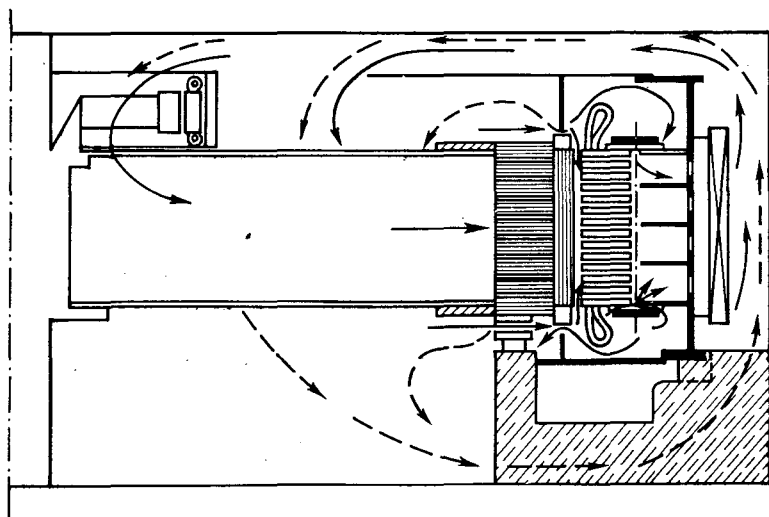


Рис. 16-4. Несогласованная схема вентиляции

дующая картина движения потоков. Попадая в звезду ротора с одной стороны машины, например сверху, как на рис. 16-4, охлаждающий воздух разветвляется на две большие струи, одна из которых поступает в каналы машины и охлаждает ее обычным образом с тем единственным исключением, что после охладителей воздух направляется только вверх. Вторая струя выбрасывается из звезды вниз и, проходя вдоль корпуса генератора между охладителями в направлении снизу вверх, присоединяется к полезному расходу воздуха, поступающему из охладителей в звезду ротора сверху. Сум-

марный расход воздуха, поступающий в звезду, ограничивается при этом лишь сопротивлением входа в звезду, весьма незначительным, если вход не дросселируется. Такая увеличенная циркуляция сопровождается большими потерями механической энергии.

В отдельных случаях явление помпажа выражено в менее резкой форме, но всегда сопровождается нарушением нормальной циркуляции и увеличением вентиляционных потерь.

Анализ показывает, что подобные аномалии имеют место лишь в тех случаях, когда вход в звезду ротора (снизу и сверху) чрезмерно раскрыт без учета соответствия между расходом через спицы и сопротивлением машины. Простейшей мерой борьбы с помпажем является дросселирование входа в звезду, которое должно быть предусмотрено при проектировании схемы вентиляции машины. Окна между спицами в целях дросселирования входа частично закрываются стальными листами.

Нужно следить за тем, чтобы скорость воздуха при входе в звезду превосходила скорость в воздухоохладителях машины по крайней мере в 1,5 раза.

Глава семнадцатая

МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

17-1. Особенности вентиляционного расчета

Крупные машины постоянного тока имеют обычно радиальную нагнетательную вентиляцию (рис. 17-1). При этом радиальные вентиляционные каналы вращающегося якоря служат активными нагнетательными элементами, и их роль должна учитываться при выполнении вентиляционного расчета.

Учет вентилирующего действия каналов якоря производится графо-аналитическим методом на основе принципов, изложенных в гл. 6 и 8. Типичная схема замещения показана на рис. 17-2.

Решение схемы замещения, которая соответствует схеме вентиляции машины, проиллюстрировано серией рисунков. На рис. 17-3 показано построение внешней характеристики обмоткодержателя. График рис. 17-4 представляет результат дополнительного включения потерь напора между щитом и лобовыми соединениями. На рис. 17-5 к полученной кривой прибавлены потери напора в полюсных окнах (а) и итог решения всего участка схемы вынесен на отдельный гра-

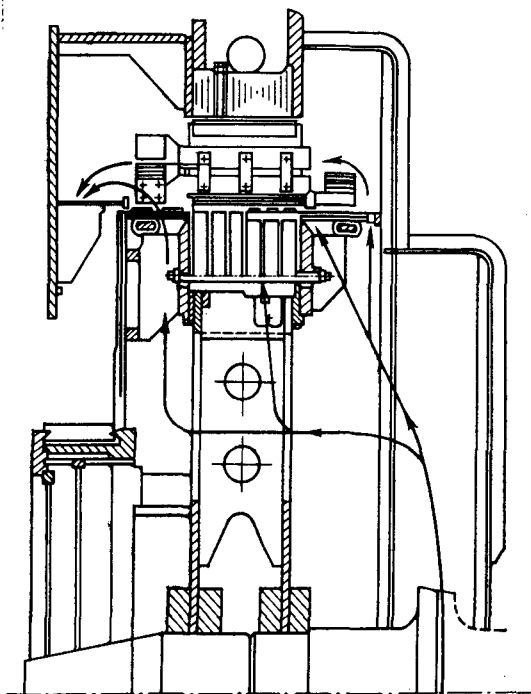


Рис. 17-1. Схема вентиляции крупной машины постоянного тока

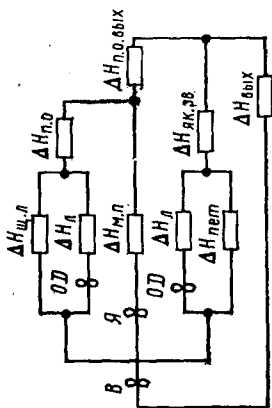


Рис. 17-2. Схема замещения

$\Delta H_{щ.л}$ — потери напора на пути между щитом и лобовыми частями якоря; $\Delta H_{л}$ — потери напора в каналах лобовой части; $\Delta H_{п.о}$ — потери напора в полюсных окнах; $\Delta H_{як}$ — обмоткодержатель; $\Delta H_{як.рз}$ — вентилятор; $\Delta H_{п.о}$ — потери напора в полюсном окне; $\Delta H_{п.о.вых}$ — потери напора на выходе из полюсного окна; $\Delta H_{лет}$ — потери напора в петушках; $\Delta H_{як.зв}$ — потери напора на выходе в звезду якоря; $\Delta H_{вых}$ — потери напора на выходе из машины

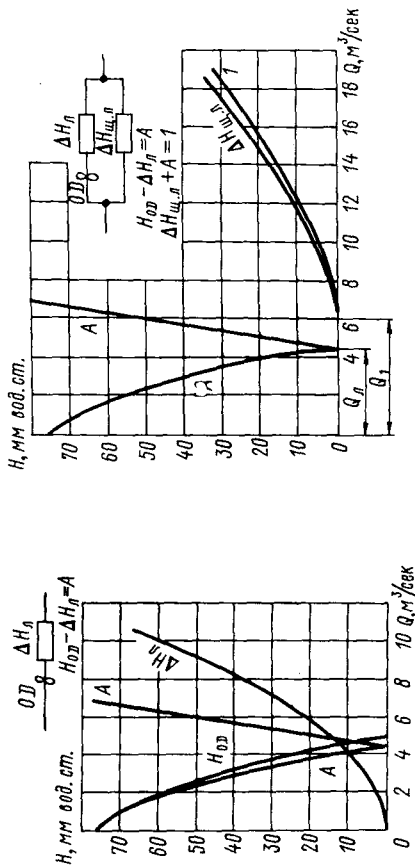


Рис. 17-3. Характеристика обмоткодержателя

Рис. 17-4. Сумма параллельных сопротивлений

фик (б). На рис. 17-6 произведено решение части схемы при подключении цепи якоря. На рис. 17-7 показано суммирование полученной кривой *B* с кривой потерь на выходе из полюсных окон (*a*) и дальнейшее суммирование с остальными сопротивлениями схемы (б).

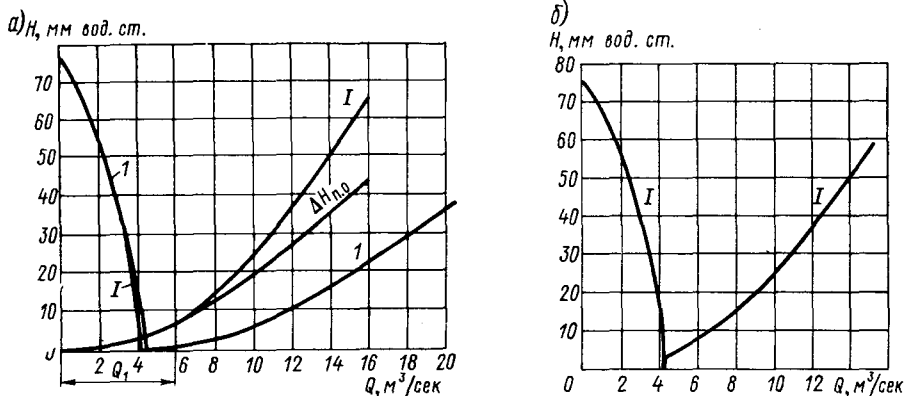


Рис. 17-5. Характеристика участка схемы

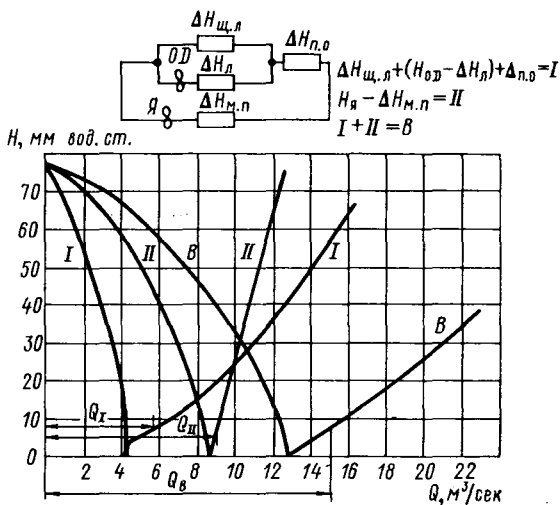


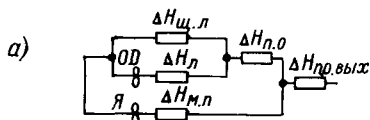
Рис. 17-6. Включение цепи якоря

17-2. Тепловой расчет якоря и магнитной системы

Эквивалентные тепловые схемы якоря и магнитной системы приведены на рис. 17-8 и 17-9. Пути движения тепловых потоков в машине ясны из рисунков. В схемах символами *R* обозначены следующие тепловые сопротивления:

а) якоря

R_1, R_9 — лобовых частей обмотки; R_2, R_3 — продольное пазовых частей обмотки; R_4 — продольное петушков коллектора; R_5, R_8 — конвективные



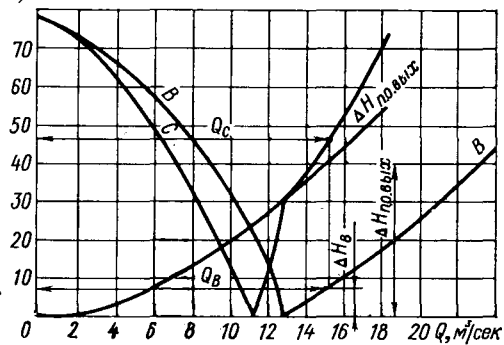
$$\Delta H_{ш.л} + (H_{OD} - \Delta H_{л}) + \Delta H_{л.0} = I$$

$$H_{Я} - \Delta H_{м.л} = II$$

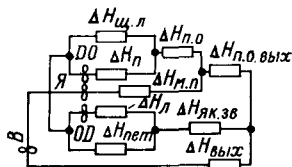
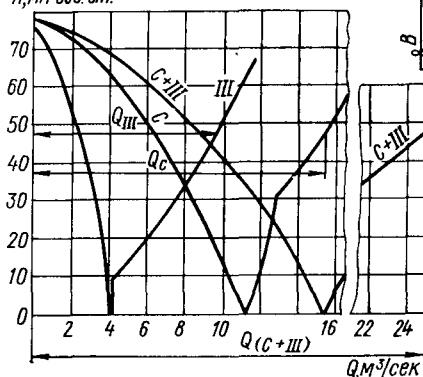
$$I + II = B$$

$$B + \Delta H_{п.о.в.в.х} = C$$

H , мм вод. ст.



б)
 H , мм вод. ст.



$$(C + III) + \Delta H_{в.в.х} = \Sigma \Delta H$$

Рис. 17-7. Построение кривой суммарного сопротивления

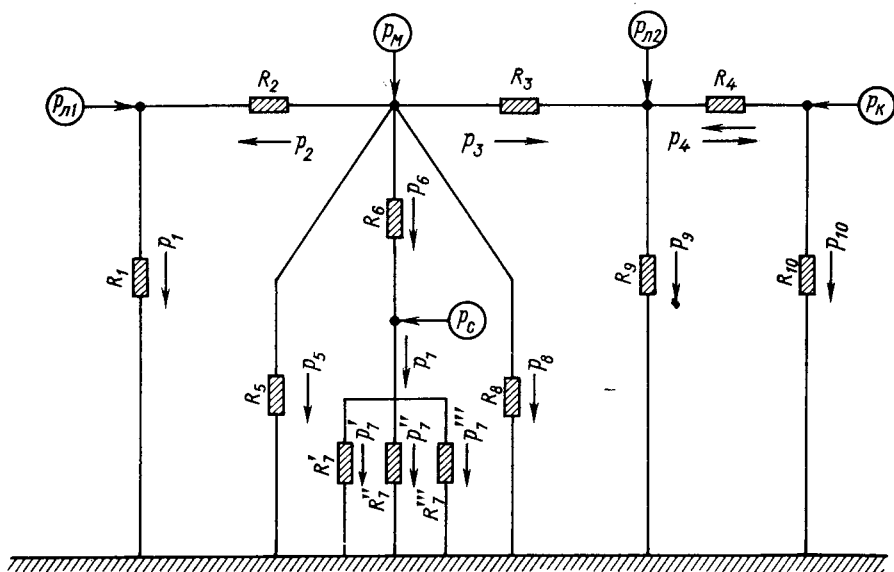


Рис. 17-8. Тепловая схема якоря

p_M — потери в пазовой части обмотки; $p_{л2}$ — в лобовой части со стороны коллектора; $p_{л1}$ — в лобовой части со стороны, противоположной коллектору; p_K — в коллекторе; p_C — в стали

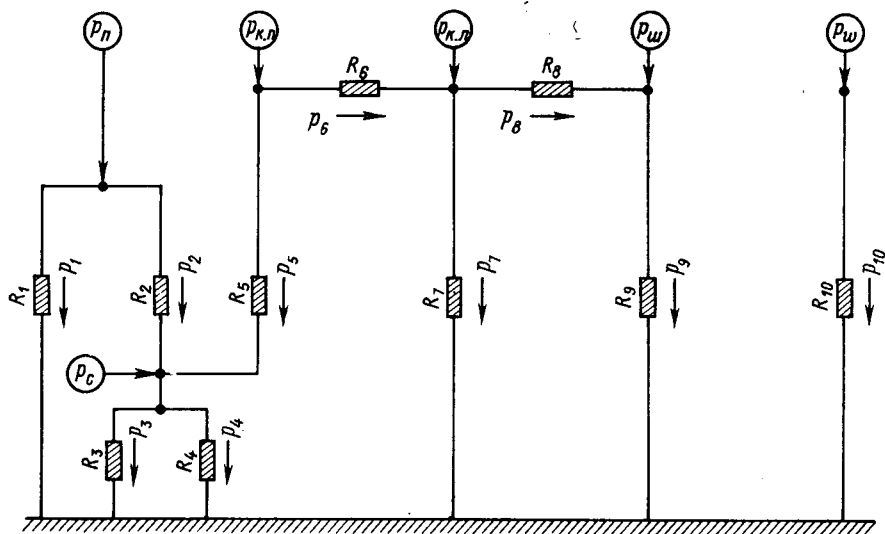


Рис. 17-9. Тепловая схема магнитной системы

p_n — потери в обмотке полюсов; $p_{к,л}$ — в компенсационной обмотке в пазовой зоне; $p_{к,л}$ — в компенсационной обмотке в лобовой зоне; $p_{ш}$ — в шинах; $p_{ш}$ — в обмотке добавочных полюсов; p_C — в стали

в вентиляционных каналах и на поверхности якоря; R_6 — изоляции пазовой части; R_7 — активной стали в трех направлениях; R_{10} — конвективное коллектора;

б) магнитной системы

R_1 — изоляции обмотки в сторону воздуха; R_2 — изоляции обмотки в сторону стали; R_3, R_4 — активной стали полюса; R_5 — пазовой изоляции компенсационной обмотки; R_6, R_8 — продольное компенсационной обмотки; R_7 — конвективное компенсационной обмотки; R_9 — конвективное соединительных шин; R_{10} — конвективное добавочных полюсов.

На основе эквивалентных схем составляются системы линейных алгебраических уравнений с превышениями температуры в качестве неизвестных (см. гл. 13).

Глава восемнадцатая

МАШИНЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

18-1. Схемы вентиляции

Для крупных машин переменного тока характерно разнообразие применяемых схем вентиляции. В тех случаях, когда основные характеристики различных схем близки между собой, возникают сомнения относительно целесообразности применения той или иной схемы.

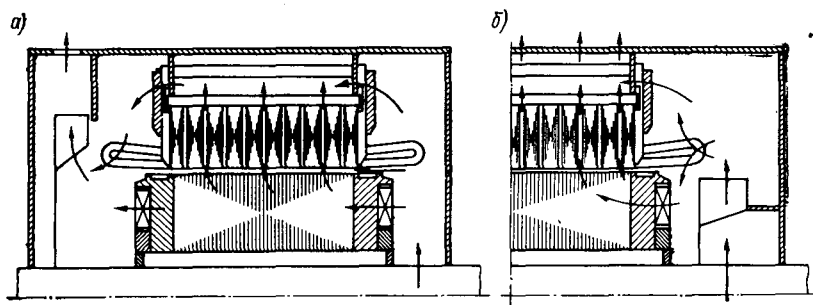


Рис. 18-1. Схемы вентиляции синхронной машины: а — вытяжная, б — нагнетательная

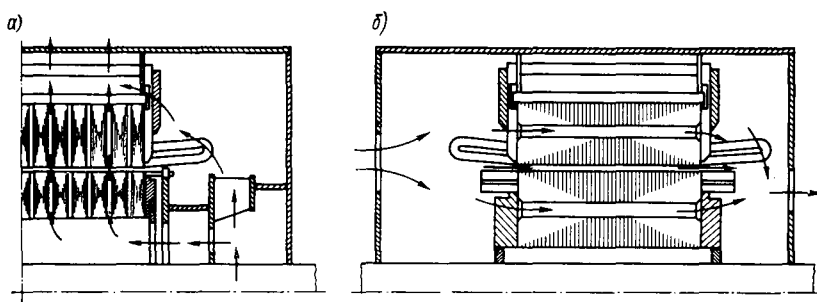


Рис. 18-2. Схемы вентиляции асинхронной машины: а — радиальная; б — аксиальная

Машины	Схемы вентиляции	Необходимый напор	Превышения температуры										Затраты энергии
			статор					ротор					
			$\vartheta_{п}$	$\vartheta_{л}$	$\vartheta_{с}$	$\vartheta_{м}$	$\vartheta_{с}$	$\vartheta_{дмф}$	$\vartheta_{с}$	$\vartheta_{л}$	$\vartheta_{колесц}$		
Синхронные	Все каналы открыты	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	Вход на поверхность сердечника статора закрыт	1,53	0,96	0,91	0,96	0,95	0,98	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98	1,53
	Выход из полюсных окон закрыт	2,08	0,92	0,94	0,89	0,85	0,99	0,98	0,98	0,98	0,95	0,95	2,08
	Нагнетательная	1,85	0,95	1,35	0,9	1,34	1,01	1,0	1,01	1,0	1,01	1,01	
Асинхронные	Радиальная	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	Аксиальная	8,3	1,54	0,7	1,8	1,5	1,57	0,7	1,57	0,7	0,7	0,7	8,30
	Аксиально-радиальная	1,45	1,04	0,96	1,07	1,09	1,09	0,97	1,09	0,97	0,97	0,97	1,45

Рассмотрим кратко особенности основных схем вентиляции и произведем их сопоставление по критериям эффективности и экономичности.

Синхронные машины выполняются с радиальной вентиляцией (рис. 18-1). При этом детализация схем осуществляется путем выполнения либо максимального количества вентиляционных каналов в сердечниках и деталях крепления, либо уменьшенного числа каналов. В табл. 18-1 даны результаты вентиляционного расчета четырех модификаций радиальной схемы. Как можно видеть, закрытие отдельных каналов повышает величину необходимого напора вентилятора вдвое и более.

Асинхронные машины выполняются с радиальной, аксиальной и смешанной аксиально-радиальной вентиляцией (рис. 18-2). Как показывает вентиляционный расчет (табл. 18-1), аксиальные схемы обладают повышенным аэродинамическим сопротивлением.

18-2. Тепловой расчет машин переменного тока

Эквивалентная тепловая схема статора машины переменного тока приведена на рис. 18-3. Схема ротора синхронной машины дана на рис. 18-4. Эквивалентная схема асинхронной машины приведена на рис. 18-5. Пути движения тепловых потоков ясны из рисунков.

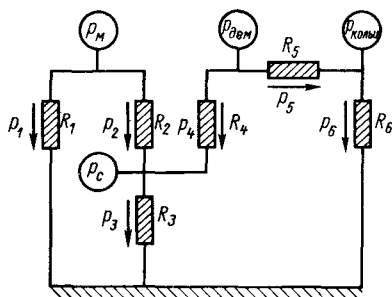
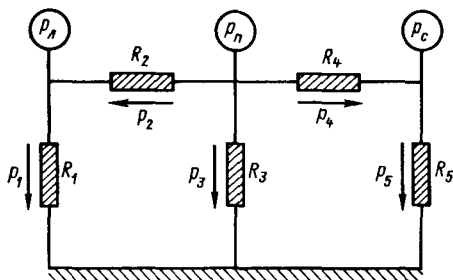


Рис. 18-3. Эквивалентная схема статора

Рис. 18-4. Эквивалентная схема ротора синхронной машины

Обозначения тепловых потоков и тепловых сопротивлений соответствуют обозначениям, принятым в гл. 13 и 17. Особенностью является учет тепловой связи ротора и статора в асинхронных машинах. Соответствующее тепловое сопротивление (воздушного зазора) обозначено $R\delta$:

$$R\delta = \frac{1}{\alpha_{\delta} \pi D_i L_0},$$

где D_i — диаметр рашочки статора.

Решение схемы статора может быть записано в виде:

$$\vartheta_{п} = \frac{p_{п} + \frac{p_{л} R_1}{R_1 + R_2} + \frac{p_{с} R_5}{R_4 + R_5}}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_3}};$$

$$\vartheta_{л} = \frac{\vartheta_{п} R_1 + p_{л} R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad \vartheta_{с} = \frac{\vartheta_{п} R_5 + p_{с} R_4 R_5}{R_4 + R_5}.$$

Решение схемы ротора синхронной машины имеет вид:

$$\vartheta_M = \frac{c + bd}{1 + \frac{R_2}{R_1} ad}; \quad \vartheta_C = \vartheta_M \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \rho_M R_2;$$

$$\vartheta_{\text{демпф}} = \vartheta_C + \vartheta_C \frac{R_4}{R_3} + \vartheta_M \frac{R_4}{R_1} - \rho_M R_4 - \rho_C R_4;$$

$$\vartheta_{\text{колец}} = \rho_{\text{демпф}} R_6 + \rho_{\text{колец}} R_6 + \vartheta_C \frac{R_6}{R_4} - \vartheta_{\text{демпф}} \frac{R_6}{R_4},$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{R_2}{R_1 R_3}; \quad b = \rho_C + \rho_{\text{демпф}} + \rho_{\text{колец}} + \rho_M \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right);$$

$$c = \rho_M R_2 - \rho_{\text{демпф}} R_4 - \rho_{\text{колец}} R_4 - \rho_{\text{колец}} R_5;$$

$$d = R_4 + R_5 + R_6.$$

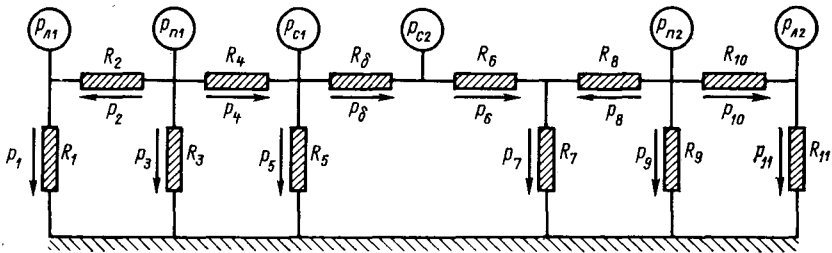


Рис. 18-5. Эквивалентная тепловая схема асинхронной машины

Расчет асинхронных машин производится на основе следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_{\text{л}} &= 0; & \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_{\text{п}} &= 0; \\ \rho_5 + \rho_8 - \rho_4 + \rho_{\text{с1}} &= 0; & \rho_6 - \rho_8 - \rho_{\text{с2}} &= 0; \\ \rho_7 - \rho_6 - \rho_8 &= 0; & \rho_8 + \rho_9 + \rho_{10} - \rho_{\text{п2}} &= 0; \\ & & \rho_{11} - \rho_{10} - \rho_{\text{м2}} &= 0; \\ \rho_2 R_2 + \rho_1 R_1 - \vartheta_{\text{п1}} &= 0; & \rho_3 R_3 - \vartheta_{\text{п1}} &= 0; \\ \rho_4 R_4 + \rho_8 R_8 + \rho_6 R_6 + \rho_7 R_7 - \vartheta_{\text{п1}} &= 0; \\ \rho_4 R_4 + \rho_8 R_8 + \rho_6 R_6 - \rho_8 R_8 + \rho_9 R_9 - \vartheta_{\text{п1}} &= 0; \\ \rho_4 R_4 + \rho_8 R_8 + \rho_6 R_6 - \rho_8 R_8 + \rho_{10} R_{10} + \rho_{11} R_{11} - \vartheta_{\text{п1}} &= 0. \end{aligned}$$

18-3. Сопоставление различных схем

В интересах краткости сопоставление параметров схемы в относительных единицах произведено в табл. 18-1. Как можно видеть, при заданной величине расхода воздуха изменение схемы вентиляции незначительно влияет на температуру активных частей машины, но приводит к заметному изменению механических потерь.

В группе синхронных машин более рациональной является радиальная схема (вытяжная или нагнетательная) с открытыми каналами в районе крепления сердечника и в полюсных окнах.

Радиальная вентиляция целесообразна и в крупных асинхронных машинах.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица П1-1

Зависимость вязкости воды от температуры
при разных давлениях
(на линии насыщения)

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н./м^2	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н./м^2	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$
0	0,005	1,788	190	12,55	0,165
10	0,009	1,306	200	15,59	0,158
20	0,019	1,006	210	19,12	0,153
30	0,03	0,8051	220	23,24	0,148
40	0,07	0,6582	230	27,95	0,145
50	0,12	0,5561	240	33,45	0,141
60	0,19	0,4780	250	39,82	0,137
70	0,31	0,4151	260	46,98	0,135
80	0,47	0,3657	270	55,09	0,133
90	0,69	0,3257	280	64,25	0,131
100	0,981	0,2944	290	73,57	0,129
110	1,47	0,272	300	85,93	0,128
120	1,96	0,251	310	98,68	0,128
130	2,74	0,233	320	112,91	0,128
140	3,62	0,217	330	128,70	0,127
150	4,70	0,203	340	146,16	0,127
160	6,67	0,191	350	165,39	0,127
170	7,94	0,181	360	186,78	0,127
180	10,0	0,173	370	210,62	0,127

Таблица П1-2

**Зависимость вязкости водяного пара от температуры
при разных давлениях
(на линии насыщения)**

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ Н/м^2	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ Н/м^2	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$
0	0,005	1700	190	12,55	2,44
10	0,009	910	200	15,59	2,04
20	0,019	520	210	19,12	1,71
30	0,03	307	220	23,24	1,45
40	0,07	190	230	27,95	1,25
50	0,12	121	240	33,45	1,06
60	0,19	80,1	250	39,82	0,913
70	0,31	54,5	260	46,98	0,794
80	0,47	38,2	270	55,09	0,684
90	0,69	27,4	280	64,25	0,599
100	0,981	20,0	290	73,57	0,526
110	1,47	15,1	300	85,93	0,461
120	1,96	11,5	310	98,68	0,402
130	2,74	8,85	320	112,91	0,353
140	3,62	6,89	330	128,70	0,310
150	4,70	5,47	340	146,16	0,272
160	6,67	4,40	350	165,39	0,234
170	7,94	3,57	360	186,78	0,203
180	10,0	2,93	370	210,62	0,169

Таблица П1-3

**Зависимость вязкости воздуха от температуры
при атмосферном давлении**

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2/\text{сек}$
-50	9,23	60	18,97	300	48,33
-40	10,04	70	20,02	350	55,46
-30	10,80	80	21,09	400	63,09
-20	12,79	90	22,10	500	79,38
-10	12,43	100	23,13	600	96,89
± 0	13,28	120	25,45	700	115,4
10	14,16	140	27,80	800	134,8
20	15,06	160	30,09	900	155,1
30	16,00	180	32,49	1000	177,1
40	16,96	200	34,85	1100	199,3
50	17,95	250	40,61	1200	223,7

Таблица П1-4

Зависимость вязкости водорода от температуры

$T, ^\circ\text{K}$	$\mu \cdot 10^6, \text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$	$T, ^\circ\text{K}$	$\mu \cdot 10^6, \text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$	$T, ^\circ\text{K}$	$\mu \cdot 10^6, \text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$
10	0,51	93	4,08	243	7,81
20	1,02	103	4,38	263	8,23
30	1,58	123	4,90	283	8,69
40	2,05	143	5,44	303	9,15
50	2,48	163	5,93	323	9,60
60	2,87	183	6,42	343	9,95
70	3,25	203	6,90	363	10,25
80	3,50	223	7,35	383	10,88

Таблица П1-5

Зависимость вязкости турбинного масла от температуры

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^3, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^3, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^3, \text{м}^2/\text{сек}$
0	780	35	62	65	17
5	500	40	49	70	14
10	340	45	38	75	12
15	228	50	31	80	10
20	162	55	25	90	8
25	115	60	20	100	6
30	83				

Таблица П1-6

Зависимость вязкости газообразного фреона-22 от температуры при атмосферном давлении

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{сек}$
-40	218	50	421	140	667
-30	238	60	446	150	696
-20	259	70	472	160	726
-10	281	80	498	170	757
0	303	90	525	180	788
10	325	100	553	190	819
20	348	110	580	200	851
30	372	120	609		
40	396	130	638		

Таблица П1-7

Зависимость вязкости жидкого фреона-22 от температуры при атмосферном давлении

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^7, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^7, \text{м}^2/\text{сек}$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^7, \text{м}^2/\text{сек}$
-65	2,94	-20	2,24	25	1,96
-60	2,83	-15	2,19	30	1,95
-55	2,72	-10	2,15	35	1,94
-50	2,63	-5	2,11	40	1,94
-45	2,55	0	2,08	45	1,94
-40	2,47	5	2,05	50	1,94
-35	2,41	10	2,02	55	1,94
-30	2,34	15	2,00		
-25	2,29	20	1,98		

Таблица П1-8

Давление насыщенных паров воды

$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}, \text{Н м}^2$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}, \text{Н м}^2$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}, \text{Н м}^2$	$\vartheta, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}, \text{Н м}^2$
0,01	0,006112	26	0,03360	52	0,13612	78	0,4315
1	0,006566	27	0,03564	53	0,14292	79	0,4547
2	0,007054	28	0,03779	54	0,15001	80	0,4736
3	0,007575	29	0,04004	55	0,15740	81	0,4931
4	0,008129	30	0,04241	56	0,16510	82	0,5133
5	0,008719	31	0,04491	57	0,17312	83	0,5342
6	0,009347	32	0,04753	58	0,18146	84	0,5558
7	0,010013	33	0,05029	59	0,19014	85	0,5781
8	0,010721	34	0,05318	60	0,19917	86	0,6011
9	0,011473	35	0,05622	61	0,2086	87	0,6249
10	0,012271	36	0,05940	62	0,2184	88	0,6495
11	0,013118	37	0,06274	63	0,2285	89	0,6749
12	0,014016	38	0,06624	64	0,2391	90	0,7011
13	0,014967	39	0,06991	65	0,2501	91	0,7281
14	0,015974	40	0,07375	66	0,2615	92	0,7560
15	0,017041	41	0,07777	67	0,2733	93	0,7848
16	0,018170	42	0,08198	68	0,2856	94	0,8145
17	0,019364	43	0,08639	69	0,2984	95	0,8451
18	0,02062	44	0,09101	70	0,3117	96	0,8767
19	0,02196	45	0,09584	71	0,3254	97	0,9093
20	0,02337	46	0,10088	72	0,3396	98	0,9429
21	0,02486	47	0,10614	73	0,3543	99	0,9775
22	0,02643	48	0,11163	74	0,3696	100	1,01325
23	0,02808	49	0,11736	75	0,3855	101	1,0499
24	0,02982	50	0,12335	76	0,4019	102	1,0876
25	0,03166	51	0,12960	77	0,4189	103	1,1265

Таблица П1-9

Давление насыщенных паров водорода

$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2	$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2	$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2
15	0,1338	22	1,633	28	5,870
16	0,2150	23	2,093	29	6,975
17	0,3280	24	2,645	30	8,210
18	0,4910	25	3,285	31	9,620
19	0,6800	26	4,030	32	11,180
20	0,8330	27	4,880	33	12,92
21	0,2470				

Таблица П1-10

Давление насыщенных паров неона

$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2	$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2
27	1,013	37	10,13
29	2,03	42	20,3
34	5,07	45	27,3

Таблица П1-11

Давление насыщенных паров гелия

$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2	$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2	$T, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5},$ н. м^2
0,9	0,00005	2,4	0,08474	3,9	0,73945
1,0	0,00016	2,5	0,10369	4,0	0,81937
1,1	0,00039	2,6	0,12635	4,1	0,90531
1,2	0,00084	2,7	0,14993	4,2	0,99770
1,3	0,00162	2,8	0,17759	4,3	1,09628
1,4	0,00293	2,9	0,20853	4,4	1,20105
1,5	0,00484	3,0	0,24293	4,5	1,31216
1,6	0,00765	3,1	0,28097	4,6	1,42978
1,7	0,01155	3,2	0,32284	4,7	1,55404
1,8	0,01674	3,3	0,37072	4,8	1,68511
1,9	0,02346	3,4	0,41879	4,9	1,82316
2,0	0,03189	3,5	0,47326	5,0	1,96831
2,1	0,04214	3,6	0,53231	5,1	2,12007
2,2	0,05422	3,7	0,59620	5,2	2,28055
2,3	0,06832	3,8	0,66515		

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

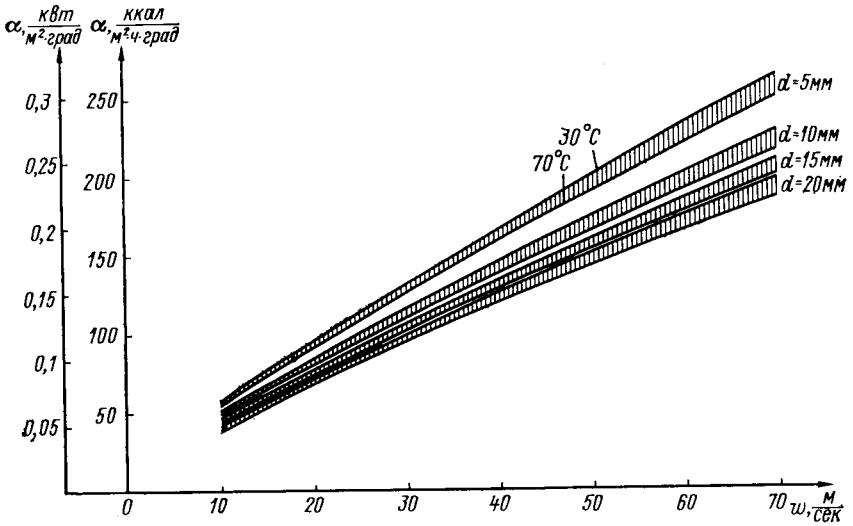


Рис. П2-1. Коэффициенты теплообмена для воздуха при температуре 30—70° С

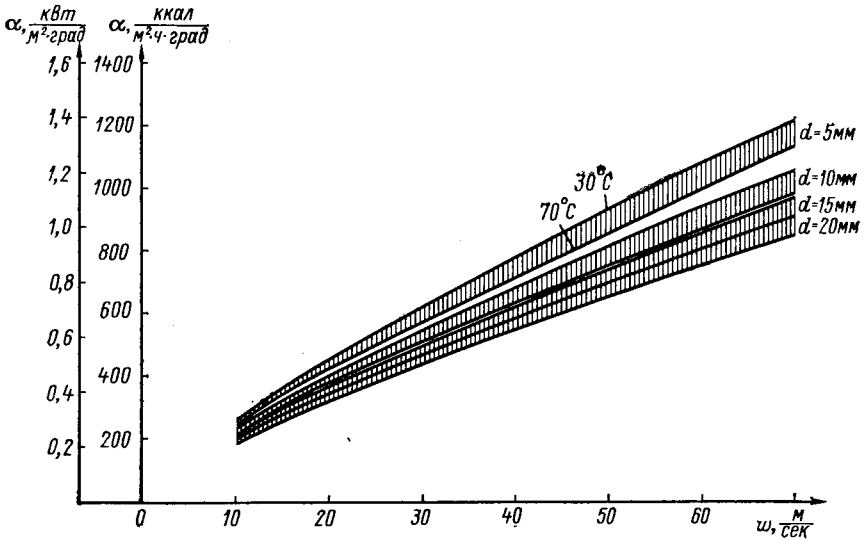


Рис. П2-2. Коэффициенты теплообмена для водорода при давлении 4 атм и температуре 30—70° С

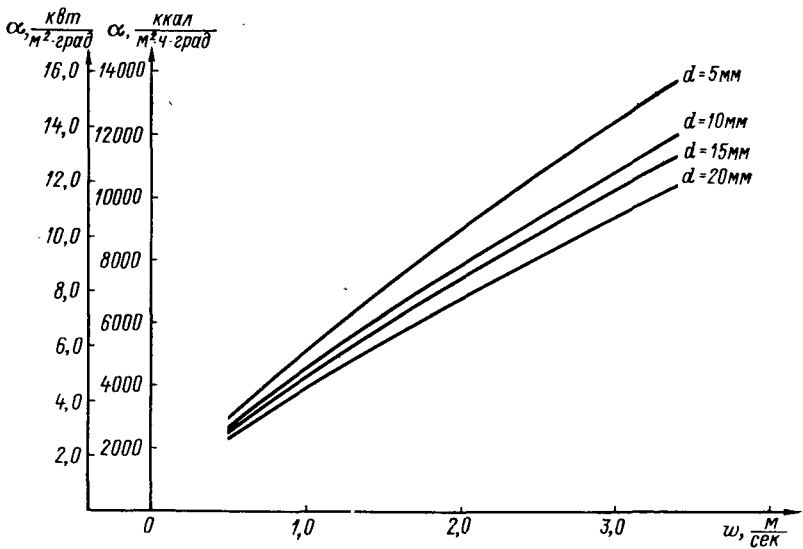


Рис. П2-3. Коэффициенты теплообмена для воды при температуре 30°C

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

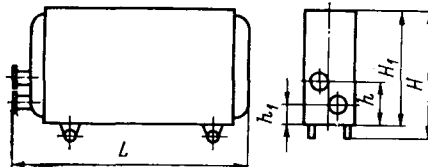


Рис. П3-1. Габаритные размеры секции

Таблица П3-1

Основные размеры и вес

Тип воздухоохладителя	Общий вес, кгс		Основные размеры				
	без воды	с водой	L	H	H_1	h	h_1
ВУП-16×6×1000-6	453	509	1428	1070	950	295	150
ВУП-16×5×1500-4	568	636	1928	1070	950	385	200
ВУП-22×6×1500-4	728	822	1928	1370	1250	385	200
ВУП-16×6×2500-2	765	857	2928	1070	950	675	275
ВУП-22×6×2500-2	990	1115	2928	1370	1250	925	325

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М., ГИТТЛ, 1953. 736 с. с ил.
2. **Алексеев А. Е.** Конструкция электрических машин. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958. 426 с. с ил.
3. **Алексеев А. Е., Костенко М. П.** Турбогенераторы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1939. 420 с. с ил.
4. **Альпер Т. И., Сергиевская Т. Г.** Охлаждение гидрогенераторов. Под ред. П. М. Ипатова. М., «Энергия», 1969. 199 с. с ил.
5. **Араманович И. Г., Левин В. И.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1964, 186 с. с ил.
6. **Белопольский В. А.** «Оптимальные аэродинамические параметры осевых вентиляторов мощных турбогенераторов». В кн.: Сборник «Электросила». Л., 1973, № 30, с. 71—73.
7. **Бергер А. Я.** Турбогенераторы переменного тока. Т. 3. Л.—М., ОНТИ НКТП, 1940, 371 с. с ил.
8. **Важнов А. И.** Электрические машины. Л., «Энергия», 1969. 768 с. с ил.
9. **Васильев Ю. К.** Теория и инженерные методы расчетов тепловых процессов в электрических двигателях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук. Киев, МЭИ, 1969. 49 с.
10. **Веников В. А., Зуев Э. И., Околоткин В. С.** Сверхпроводники в энергетике. М., «Энергия», 1972. 119 с. с ил.
11. **Видеман Е.** Конструкции электрических машин. (Пер. с нем.) Под ред. Б. Н. Красовского. Л., «Энергия», 1972. 520 с. с ил.
12. **Виноградов В. И.** Исследование вентиляторов электрических машин. Л., «Энергия», 1970. 90 с. с ил.
13. **Вольдек А. И.** Электрические машины. М.—Л., «Энергия», 1966. 782 с. с ил.
14. **Вопросы применения сверхнизких температур в электротехнике.** Л., «Наука», 1971. 105 с. с ил.
15. **Вукалович М. П., Новиков И. И.** Техническая термодинамика. М.—Л., Госэнергоиздат, 1952. 567 с. с ил.
16. **Генендер И. С., Зильберштейн Л. А.** Нестационарный тепловой режим обмотки электрической машины с непосредственным продольным охлаждением. В кн.: Проектирование и производство крупных электрических машин. [Опыт НИИ и завода «Сибэлектротяжмаш»]. Новосибирск, Западно-Сибирское изд-во, 1973, с. 165—168 с ил.
17. **Готтер Г.** Нагревание и охлаждение электрических машин. (Пер. с нем.) Под ред. В. В. Мальцева. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961. 480 с. с ил.
18. **Гринберг Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. АН СССР, М., 1948. 480 с. с ил.
19. **Гуревич Э. И.** Тепловые испытания турбогенераторов большой мощности. Л., «Энергия», 1960. 170 с. с ил.
20. **Гуревич Э. И., Уварова В. М.** Исследование неустановившейся температуры в обмотках с непосредственным охлаждением. В кн.: Сборник «Электросила». Л., 1967, № 26, с. 95—101.

21. Гуревич Э. И., Шифрина Н. Н. Температура газа в зазоре турбогенератора.— «Электротехника», 1969, № 4, с. 15—18 с ил.
22. Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов теплообмена. М., «Высшая школа», 1967, 303 с. с ил.
23. Данько В. Г. Теоретическое и экспериментальное исследование нагрева крупных электрических машин. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук. Харьков, ХПИ, 1971. 53 с.
24. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. (Пер. с нем.) М., «Наука», 1971. 288 с. с ил.
25. Дорожкин В. С. Нестационарные распределения температур при движении теплоносителя в каналах. В кн.: Глубокий холод и кондиционирование. М., 1970, № 138, с. 151—156.
26. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960. 260 с. с ил.
27. Дрейцер Л. С. Радиальная система вентиляции мощных турбогенераторов.— «Электротехника», 1969, № 2, с. 5—10 с ил.
28. Залесский А. М., Кукеков Г. А. Тепловые расчеты электрических аппаратов. Л., «Энергия», 1967. 380 с. с ил.
29. Идельчик И. Е. Гидравлические сопротивления. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954. 316 с. с ил.
30. Искусственная кавитация. Под ред. И. Т. Егорова. Л., «Судостроение», 1971. 280 с. с ил.
31. Ито, Нанбу. Течение во вращающихся прямых трубах круглого поперечного сечения.— Труды американского общества инженеров-механиков, русский перевод, 1971, № 3, с. 45—56 с ил.
32. Кади-Оглы И. А. Анализ схем непосредственного водяного охлаждения обмоток роторов турбогенераторов. В кн.: Проблемы создания турбо- и гидрогенераторов большой мощности. Л., «Наука», 1972, с. 86—94 с ил.
33. Карслору Х., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. (Пер. с англ.) Под ред. А. А. Померанцева. М., «Наука», 1964, 487 с. с ил.
34. Корнфельд М. И. Упругость и прочность жидкости. М., Гостехиздат, 1951, 124 с. с ил.
35. Костенко М. П. Электрические машины (специальная часть). М.—Л., Госэнергоиздат, 1949. 712 с. с ил.
36. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.—Л., ОНТИ, 1937. 454 с. с ил.
37. Кутателадзе С. С. Теплопередача при конденсации и кипении. М.—Л., Машгиз, 1952. 230 с. с ил.
38. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидравлика газо-жидкостных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958. 232 с. с ил.
39. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1970. 659 с. с ил.
40. Ламб Г. Гидродинамика. (Пер. с англ.) Под ред. Н. А. Слезкина. М.—Л., ГИТТЛ, 1947. 928 с. с ил.
41. Лойцянский Л. Г. Механика жидкостей и газов. М., «Наука», 1970. 904 с. с ил.
42. Ломакин А. А. Центробежные и осевые насосы. М.—Л., «Машиностроение», 1966. 363 с. с ил.
43. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., ГИТТЛ, 1952. 392 с. с ил.
44. Мальцев В. В. Исследование условий потери непрерывности течения жидкости в каналах ротора. В кн.: Гидрогенераторы и турбогенераторы. М., ВНИИЭМ, 1969, с. 189—196.
45. Мартыновский В. С. Анализ действительных термодинамических циклов. М., «Энергия», 1972. 215 с. с ил.
46. Микulin Е. И. Криогенная техника. М., «Машиностроение», 1969. 270 с. с ил.
47. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М.—Л., Госэнергоиздат, 1947. 416 с. с ил.
48. Москвитин А. И. Непосредственное охлаждение электрических машин. М., Изд-во АН СССР, 1962. 224 с. с ил.

49. Невельсон М. И. Центробежные вентиляторы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954. 334 с. с ил.
50. Павлухин О. И. и др. Применение ЭВМ для аэродинамических и тепловых расчетов крупных электрических машин. В кн.: Сборник «Электросила». Л., 1973, № 31, с. 62—63 с ил.
51. Перник А. Д. Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966. 438 с. с ил.
52. Петров Г. Н. Электрические машины. Ч. 2. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963. 415 с. с ил.
53. Постников И. М. Проектирование электрических машин. Киев, Гостехиздат, 1960. 910 с. с ил.
54. Прандтль Л. Гидроаэродинамика. (Пер. с нем.) М.—Л., 1951. 575 с. с ил.
55. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. 1, 2. (Пер. с нем.) М.—Л., ОНТИ НКТП, 1935. 506 с. с ил.
56. Проскура Г. Ф. Гидродинамика турбомашин. Киев, Машгиз, 1954. 417 с. с ил.
57. Рихтер Г. Гидравлика турбопроводов. (Пер. с нем.) Под ред. Е. П. Шубина. М.—Л., ОНТИ НКТП, 1936. 324 с. с ил.
58. Розенфельд Л. М., Ткачев А. Г. Холодильные машины и аппараты. М., ГТИ, 1955. 584 с. с ил.
59. Рысин С. А. Справочник по вентиляторам. М., Госстройиздат, 1954. 247 с. с ил.
60. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1953. 679 с. с ил.
61. Тонг Л. Теплоотдача при кипении и двухфазное течение. (Пер. с англ.) Под ред. И. Т. Аладьева. М., «Мир», 1969. 342 с. с ил.
62. Турбогенераторы. Под ред. Р. А. Лютера и Н. П. Иванова. Л., «Энергия», 1969. 994 с. с ил.
63. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М., «Наука», 1964. 814 с. с ил.
64. Филиппов И. Ф. Вопросы охлаждения электрических машин. М.—Л., «Энергия». 330 с. с ил.
65. Филиппов И. Ф. Некоторые современные проблемы и тенденции охлаждения электрических машин. В кн.: Сборник «Электросила». Л., 1968, № 27, с. 154—159 с ил.
66. Хуторецкий Г. М. Проектирование и расчет современных двухполюсных турбогенераторов. Л., ЛПИ, 1962. 151 с. с ил.
67. Bratt D. The multiply-radial system of cooling large turbine-generators.—"Transactions AIEE", 1924, April, p. 437—454.
68. Dobner E. Über den Strömungswiderstand in einem rotierenden Kanal. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1959, S. 1—62.
69. Fehheimer C. An experimental and analytical study of turbine-generator rotor ventilation.—"Transactions AIEE", Vol. 69. 1950, p. 1563—1568.
70. Fehheimer C., Penney C. Ventilation of turboalternators concluding study multiply path radial systems.—"Transactions AIEE", 1926, Febr., p. 253—267.
71. Fette H. Strömungsversuche in rotierenden Laboratorium.—"Zeitschrift für technische Physik", 1933, Nr. 7, S. 257—266.
72. Fritsch E. Wirbelbildung und Kräftewirkung an umlaufenden Kreiselschneidrad-schaufeln.—"VDI-Forschungsheft 384. Beilage zu Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Mai/Juni 1937, Bd. 8, S. 1—28.
73. Grünagel E. Flüssigkeitsbewegung in umlaufenden Radialrädern.—"VDI—Forschungsheft 405. Beilage zu Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, November/Dezember 1940, Bd. 11, S. 5—82.
74. Hak I. Kanal mit Abzweigungen; ein Betrag zum Ventilationsproblem des Turbogenerators.—"Elektrotechnik und Maschinenbau", 1956, Nr. 15—16, S. 257—271.
75. Hlaváč J. Příklad chlazení pólových cívek synchronich stroju.—"Elektrotechnický obzor", 1964, 53, N 7, s. 353—360.

76. **Hlavač J.** Ventilační a třecí v elektrických strojích točivých.— "Elektrotechnický obzor", 1967, N 9, s. 478—483.
77. **Kerenyi D.** Turbogeneratorok szeltozenek szamitasa reszletkismintakon vegzett meresek alapjan.— "Elektrotechnika", 1955, N 1, Budapest, s. 14—19.
78. **Kramer J., Stanitz J.** A Note on secondary flow in rotating radial channels.— "National advisory committee for aeronautics". Technical Note 3013. Cliveland, 1953, 27 p.
79. **Kucharsky W.** Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München und Berlin 1918. 120 S. mit Abb.
80. **Mises R.** Theorie der Wasserräder. Leipzig, 1908. 325 S. mit Abb.
81. Oblizenie chłodzenia maszyn elektrycznych wielkiej mocy.— "Zeszyty naukowe Politechniki warszawskiej Elektryka", N 42, 1965, N 117, s. 77—111. Awt.: J. Lukaszewicz i dr.
82. **Ondruška E.** Ventilační straty v točivých elektrických strojích a metoda jejich výpočtu.— "Elektrotechnický obzor", 1971, t. 60, N 5, s. 483—491.
83. **Rokowska B., Szmorlinski Z.** Obwody przewietrzeniowe maszyn elektrycznych a przekształcenie gwiazda-trójkąt.— "Archiwum elektrotechniki", t. 17, s. 41—46.
84. **Seelig W.** Über das Phänomen der "Rotations-Turbulenz" in rotierenden Röhren und Kanälen. Stockholm, 1930, 4 S.
85. **Soderberg R.** Steady flow of heat in large turbine-generators.— "Transactions AIEE", 1931, June, p. 782—802.
86. **Thiruvengadan A. A.** United theory of cavitation damage.— "Journal of basic engineering", 1963, september, p. 365—376.

Носиф Филиппович Филиппов

ОСНОВЫ ТЕПЛОБМЕНА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Редактор **В. В. Лебедева.** Художественный редактор **Г. А. Гудков.**
Технический редактор **В. И. Ботикова.** Корректор **А. Ф. Кузнецова.**

Сдано в набор 17/XII 1973 г. Подписано к печати 14/III 1974 г. М-22282.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Печ. л. 24. Уч.-изд. л. 23,9.
Тираж 5500 экз. Заказ № 2453. Цена 1 р. 44 к.

Ленинградское отделение издательства «Энергия». 192041,
Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 196126, Ленинград, Ф-126,
Социалистическая ул., 14.

114

24730